

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Nour Bachir El Bayadh

Institut des Sciences

Département de Technologie



Polycopié

Cours UEF1. intitulé : Physique II

INTITULE DU MODULE : ÉLECTRICITE ET MAGNETISME

COURS ET EXERCICES CORRIGES

Dr. Mebrek Moued

Maître de Conférences Classe « A »

Centre Universitaire Nour Bachir – El Bayadh

2021-2022

AVANT PROPOS

Ce polycopié de cours physique II et dont l'intitulé est « Electricité et Magnétisme » est un moyen pédagogique estimé aux étudiants de la première année socle commun, qui préparent une licence dans le domaine de Sciences et Technologie (S.T) du système LMD, il peut servir comme un support au cours dispensé aux étudiants. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide. Le contenu de ce polycopié est structuré en deux parties.

La première partie contient trois chapitres:

Chapitre. 1: Un Rappel mathématiques notamment sur le Champ scalaire et champ vectoriel, Les systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques), Opérateurs, et la Transformations Intégrales (simple ,double, et triple). L'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées.

Chapitre .2: l'électrostatique étudie les concepts, les phénomènes et les lois réservées à l'électricité des charges localement « immobiles ». C'est dans cette chapitre qu'on introduise les concepts fondamentaux de charge élémentaire et ponctuelle, du champ et potentiel électrostatiques et du flux du champ. Ces éléments de base nous aident à étudier les dipôles électriques et les conducteurs en équilibre électrostatique à travers l'utilisation du théorème de Gauss. A leur tour, ces derniers sont les pré-requis pour l'étude de la pression électrostatique et des capacités des différents conducteurs et condensateur

Chapitre .3: Le système électrocinétique étudie les lois qui interagissent avec la circulation du courant électrique afin de pouvoir comprendre les différentes lois impliquées. A savoir : la loi d'Ohm et la loi de Joule et son effet, avec les lois de Kirchhoff, dans l'étude des circuits électriques et donc des réseaux électriques. Chaque chapitre est illustré par des exercices qui constituent une application, à des problèmes concrets, des lois introduites dans le cours. La résolution de ces exercices permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien assimilé le cours, d'estimer les ordres de grandeur et d'attacher de l'importance à l'analyse dimensionnelle aux unités de mesures et à la précision d'un résultat numérique .

-Deuxième partie: Chapitre .1. L ' électromagnétisme, est plus ou moins indépendante des chapitres précédentes, vu la nature magnétique considérée. On s'est intéressé aux concepts de base et à l'introduction de la notion du champ magnétique, de la force de Lorentz et des lois

régissant les différents phénomènes de ce domaine. La loi de Laplace, celles de Faraday et de Biot Savart font l'ensemble des lois étudiées dans ce chapitre et c'est ce qu'il faut pour l'étude d'un dipôle magnétique. Enfin on souhaite à tous nos étudiants un très bon cursus universitaire et un parcours plein de réussite

sommaire

Partie 1:Chapitre 1: Rappels mathématiques

1. 1. Champ scalaire et champ vectoriel	01
1.1.2. Notion de Champ	01
1.1.2.Définition	01
1.2. Champ scalaire	01
1.2.1.Définition	01
1.3. Champ vectoriel	01
1.3.1.Définition	01
1.4. Les systèmes de coordonnées	01
1.4.1. Coordonnées cartésiennes	01
1.5. Polaire ou cylindrique	02
1.5.1. Coordonnées cylindriques	02
1.5.2. Coordonnées sphériques	02
1.6.Applications	03
1.7.Opérateurs	04
1.7.1: Gradient	04
1.7.2.Coordonnées cartésiennes	04
1.7.3.Coordonnées cylindriques	05
1.7.4.Coordonnées sphériques	06
1.7.5.Propriétés	06
1.7.6.Direction du gradient	06
1.7.7.Sens du gradient	06

1.7.8.Circulation d'un gradient.....	06
1.8.La Divergence.....	07
1.8. 1.Coordonnées cartésiennes.....	07
1.8.2.Coordonnées cylindriques.....	07
1.8.3.Coordonnées sphériques.....	07
1.8.4.Divergence et flux d'un vecteur.....	07
1.9. Le Rotationnel.....	07
1.9. 1.Coordonnées cartésiennes.....	08
1.9. 2.Coordonnées cylindriques.....	08
1.9. 3.Coordonnées sphériques.....	08
1.9. 4.Rotationnel et circulation d'un vecteur.....	08
1.10. Le Laplacien.....	09
1.10. 1. Définitions.....	09
1.10. 2. En coordonnées cartésiennes.....	09
1.11. Relations Vectorielles.....	09
1.12. Transformations Intégrales.....	10
Exercices Corrigés.....	11

Chapitre 2. Electrostatique

2. Généralités:.....	19
2.1.a. Phénomènes électrostatiques.....	19
2.1.b. Processus d'électrisation	19
2.1.c . Electrisation par frottement.....	19
2.1.d. Electrisation par contact.....	20

2.1.e. Origine d'électrisation.....	22
2.1.f. Electrisation par influence.....	22
2.1.h. Electrisation par conduction.....	23
2.2. Série triboélectrique.....	23
2.3. Charges électriques.....	24
2.3.1. Propriétés des charges électriques.....	24
2.4. Conducteur – Isolant.....	24
2.5. Structure de la matière.....	25
2.5.1 Atome.....	25
2.6. Conservation et quantification de la charge électrique.....	26
2.6. 1.les charges ponctuelles.....	25
2.6.2. les distributions continues de charge.....	25
2.6.2 a. linéique.....	26
2.6.2 b. surfacique.....	26
2.6.2 c. volumique.....	26
2.7. Les forces de la nature.....	27
2.8. Forces électriques: loi de Coulomb.....	27
2.8.1.Rappels sur la loi de gravitation universelle	27
2.8.2.Force électrique.....	27
2.9. Champ électrostatique.....	30
2.9.1.Rappels: champ scalaire et champ vectoriel.....	30
2.9.2. Champ de scalaires.....	30
2.9.3. Champ de vecteurs.....	30

2.10. Champ électrique.....	30
2.10.1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée.....	31
2.10.2.Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles.....	32
2.10.2.1. Principe de superposition.....	32
2.10.3. Champ créé par une distribution continue de charges.....	35
2.10.3.1.Distributions de charges linéique.....	35
2.10.3.2.Distributions de charges surfaciques.....	36
2.10.3.3.Distributions de charges Volumiques.....	36
2.11.Lignes et tubes du champ électrique.....	37
2.11.a. Lignes de champ.....	37
2.11.b. Un tube de champ.....	37
2.12. Potentiel Electrique.....	38
2.12.1.Définition.....	39
2.12.2.Surface équipotentielle.....	39
2.12.3. Circulation d'un vecteur.....	40
2.12.3.1.Définition.....	40
2.12.4.Potentiel créé par une charge ponctuelle.....	40
2.12.5.Potentiel créé par un ensemble de charges Ponctuelles.....	41
2.13. Energie électrostatique.....	43
2.13.1. Energie potentielle d'une charge ponctuelle en interaction.....	43
2.13.2. Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles.....	43
2.14. Dipôle Electrique.....	44
2.14. 1. Moment dipolaire électrique.....	44

2.14.2. Potentiel électrique créé par un dipôle.....	45
2.14.3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle.....	45
2.14.4. Dipôle placé dans un champ électrique uniforme.....	47
2. 15. Energie potentielle.....	48
2.16. Diélectriques.....	48
2.16.1. diélectriques apolaires.....	49
2.16.2. diélectriques polaires.....	49
2.17. Flux Electrostatique et théorème de Gauss.....	49
2.17.1. flux électrique.....	49
2.17.2.Définition.....	49
2.17.3.Théorème de Gauss.....	50
2.17.4. Application du Théorème de Gauss	51
2.17.4 a. champ crée par une charge ponctuelle.....	51
2.17.4b. Potentiel crée par une charge ponctuelle.....	52
2.17.4c. Champ produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée	52
2.16.4d. Potentiel produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée.....	53
2.16.4e. Champ électrique produit par une sphère pleine chargée uniformément.....	53
2.17.4f. Champ électrique produit par un plan infini chargé uniformément	55
2. 18. Flux d'un Vecteur.....	56
2.18.1. Flux élémentaire.....	56
2.18.2. Flux à travers une surface ouverte.....	56
2.19. Angle Solide.....	58

2.19. 1.Angle solide élémentaire.....	58
2.19.2.Définition.....	58
2.19.3.Cône de demi-angle au sommet α_0	59
2.19.4.La relation entre l'angle solide et le flux électrique	60
2.20. Conducteurs en Equilibre.....	60
2.20.1. Définition	61
2.20.2.Propriétés des conducteurs en équilibre	61
2.20.2a. Champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.....	61
2.20.2b. Conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel.....	61
2.20.2c. La charge est nulle en toute région interne au conducteur.....	61
2.20.2d. Relation entre le champ au voisinage immédiat d'un conducteur et la charge électrique superficielle	62
2.20.2e. Pression électrostatique.....	64
2.21. Capacité propre d'un condensateur seul dans l'espace.....	64
2.21.1.Définition.....	64
2.21.2. Energie interne d'un conducteur chargé seul dans l'espace	64
2.22. Condensateurs.....	65
2.22. 1. Calcul de la capacité d'un condensateur.....	66
2.22.2.Capacités de quelques types de condensateurs.....	66
2.22.3.Exemples.....	67
2.22.3a. Condensateur plan	67
2.17.3b. Condensateur sphérique	68
2.22.3c. Condensateur cylindrique.....	68
2.13. Groupement de condensateurs.....	70
2.23.1.Groupement en série.....	70

2.23.2. Groupement en parallèles.....	71
2.24. Energie d'un condensateur chargé.....	71
2.24.1. Energie du champ électrique.....	71
2.24.2. Densité de l'énergie électrique.....	72
2.25. Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance.....	72
2.25.1. Charge d'un condensateur	73
2.25.1a. Définition	74
2.25.1b. Durée de la charge ou décharge	74
2.25.1c. Décharge d'un condensateur.....	75
Exercices Corrigés.....	77

Chapitre 3. Electrocinétique

3.Introduction.....	91
3.1. Courant électrique.....	91
3.1.1. Définition.....	91
3.1.2. Intensité du courant électrique	91
3.1.3. Sens du courant	91
3.2. Loi d'Ohm.....	92
3.3. Densité de courant.....	92
3.3.1. Définition.....	93
3.3.2. Relation entre le champ électrique et la densité de courant électrique.....	94
3.3.3. Relation entre $\vec{E}$, $\vec{j}$ et I	95
3.4. Effet de Joule.....	96
3.5. Rappel sur le groupement des conducteurs ohmiques.....	97
3.5.a. Groupement en série.....	97

3.5.b. Groupement en parallèle.....	97
3.6.Eléments d'un circuit électrique.....	98
3.6.1. Eléments et vocabulaire du circuit électrique.....	98
3.7. Nécessité de la disponibilité d'une force électromotrice.....	99
3.8.Les deux types de générateurs.....	100
3.8.1.Générateurs ou sources de tension	100
3.8.2.Générateurs ou sources de courant.....	100
3.9. Les lois régissant les circuits électriques	101
3.9.1. Equation du circuit électrique.....	101
3.10. Différence de potentiel entre deux points d'un circuit.....	102
3.11. différence de potentiel aux bornes d'un générateur de tension.....	103
3.12. Groupement de générateurs.....	104
3.12.1. Cas des générateurs de tension.....	104
3.12.2. Association en série.....	104
3.12.3. Association en opposition.....	104
3.12.4. Association en séries.....	105
3.12.5. Cas des générateurs de courant.....	105
3.12.6. Groupement en parallèle.....	105
3.12.7. Association en série.....	105
3.13. Définition d'un réseau électrique.....	107
3.13.1 . Nœuds - Branches - Mailles	107
3.14. Résolution d'un réseau électrique.....	108
3.15. Méthode de résolution d'un réseau électrique.....	108

3.16. Les lois de Kirchhoff.....	108
3.16.2 . La loi des Nœuds	109
3.16.2 .a. Conventions sur le courant	109
3.16.3. La loi des mailles.....	109
3.16.3.a. Convention sur une maille.....	109
3.16.4. Règles d'application	110
3.17. Pont diviseur de tension.....	111
3.18. Pont diviseur de courant.....	111
3.19. Le théorème de Thévenin	112
3.20. Application 1: montage avec une source de tension	112
3.21. Théorème de Norton.....	116
3.22. Exemples d'application des théorèmes de Thévenin et Norton.....	116
3.22.1. Théorème de Millman.....	116
Exercices Corrigés.....	117

Partie.2

Chapitre 1. Electromagnétisme

1. Magnétisme et définition du champ magnétique.....	124
1.1. Le magnétisme	124
1.2. Les aimants permanents	124
1.2.a. Les aimants naturels.....	125
1.2. b. Les aimants artificiels.....	125
1.3. Les aimants non permanents.....	125
1.5. Les dipôles magnétiques.....	126

1.6. Attraction et répulsion des aimants.....	126
1.7. Origine du magnétisme.....	126
1.8. Définition du champ magnétique.....	127
1.8.1. Définition.....	127
1.9. Principe de superposition de champs magnétiques.....	128
1.10. Force électromagnétique agissant sur une charge électrique en mouvement....	128
1.10.1.La force de Lorentz.....	128
1.10 .2.Unité du champ magnétique	129
1.10.3. La loi de Laplace.....	129
1.10.4. La règle d'Ampère.....	130
1.10.5. La loi de Biot et Savard.....	132
1.11. Application de la loi de Biot et Savard	132
1.11.a. Champ d'induction magnétique produit par un courant rectiligne infini	132
1.11.b. Champ d'induction magnétique produit par un courant circulaire.....	133
1.11.b1.Cas particulier.....	135
1.12.Dipôle magnétique.....	135
1.12.1.Définition, modélisation et champ crée.....	135
1.12.2. Moment Magnétique.....	136
1.12.3. Induction électromagnétique.....	136
1.12.4. Le Flux magnétique	137
1.12.3.a. Notion intuitive.....	137
1.12.3.b. Définition du vecteur surface.....	137
1.13. Définition du flux magnétique.....	138
1.14.la loi de Faraday-Henry.....	138
4.14.1.Description de l'expérience et terminologie.....	139

1.14.2.Enoncé de la loi de Faraday-Henry.....	139
1.15.La loi de Lenz.....	140
Exercices Corrigés.....	142
Bibliographie.....	151

Partie .1

Chapitre 1. Rappels Mathématiques

1. Champ scalaire et champ vectoriel

1.1. Notion de Champ

1.1.2.Définition

En physique, un champ est l'ensemble des valeurs d'une grandeur physique qui peuvent être attribuées aux points de l'espace à l'instant t . Il peut être scalaire ou vectoriel. A chaque point de l'espace est associée une seule valeur de cette grandeur.

1.2. Champ scalaire

1.2.1.Définition

Un champ scalaire est un champ dont la valeur attribuée à chaque point de l'espace est associée à une grandeur physique indépendante de la direction. Analytiquement, elle est représentée par une fonction scalaire. Dans le cas général cette fonction est à plusieurs variables, telle que : $f(x,y,z)$. Schématiquement, elle est représentée par un dégradé de couleurs, où on représente par le rouge les valeurs les plus élevées et par le bleu les valeurs les plus basses (Ex : champ de température). Elle peut être aussi schématisée par des lignes des valeurs constantes de la grandeur (ex : champ de pression).

1.3. Champ vectoriel

1.3.1.Définition

Un champ vectoriel est un champ dont la valeur attribuée à chaque point de l'espace est associée à une grandeur physique, pour laquelle la direction est une propriété fondamentale. Analytiquement, elle est représentée par une fonction vectorielle.

Dans le cas général cette fonction est à plusieurs variables, telle que $\vec{F}(x,y,z)$.

Schématiquement, elle est représentée par de petits vecteurs aux points juxtaposés de l'espace.

1.4. Les systèmes de coordonnées

1.4.1. Coordonnées cartésiennes

Soient les vecteurs unitaires : $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

figure (1.1)

$$\text{avec : } \vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (1-1)$$

$$\text{et } r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1-2)$$

Si M se déplace, on a :

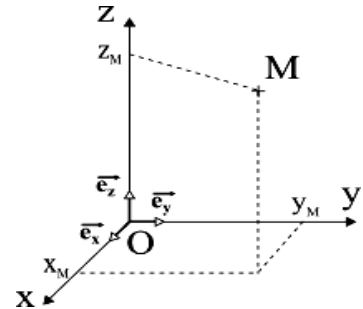
$$\vec{dl} = d\vec{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad (1-3)$$

Elément de volume

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

Elément de surface

- $dS = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- $dS_z = dx \cdot dy$ (pour $dz = 0$)
- $dS_y = dx \cdot dz$ (pour $dy = 0$)
- $dS_x = dy \cdot dz$ (pour $dx = 0$)



Figure(1.1) :Coordonnées cartésiennes

1.5. Polaire ou cylindrique

1.5.1. Coordonnées cylindriques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$

On définit la position du point M par sa coordonnée z (appelée la cote) et par les coordonnées polaires r, θ de son projeté sur le plan xOy .

$$\vec{r} = \vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad (1-4)$$

$$r = OM = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (1-5)$$

Si M se déplace, on a :

$$\vec{dl} = d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \quad (1-6)$$

Elément de surface latérale : $dS_l = r d\theta \cdot dz$

Elément de surface de la base : $dS_b = dr \cdot r d\theta$

Elément de volume : $dV = dr \cdot r d\theta \cdot dz$

Expressions des vecteurs unitaires

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

1.5.2. Coordonnées sphériques

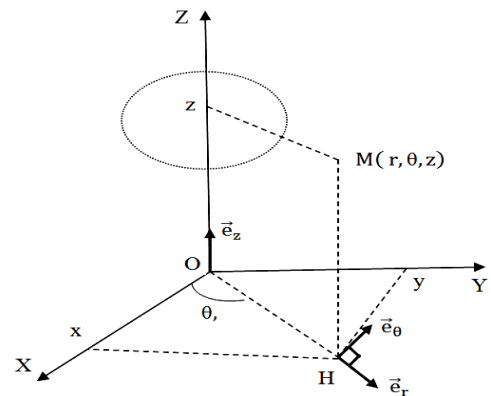
Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

On définit M par la longueur $r = OM$ et les deux angles θ et ϕ , tel que:

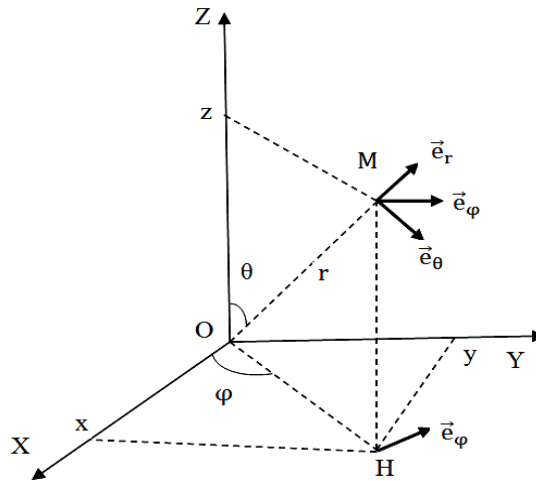
$$\vec{r} = \vec{OM} = r \vec{e}_r \quad (1-7)$$

On peut démontrer que :

$$\vec{dl} = d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi \quad (1-8)$$



Figure(1.2) :Coordonnées cylindriques



Figure(1.3) :Coordonnés Sphériques

Remarques

- Les coordonnées sphériques du point M sont : (r, θ, φ)
- Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont : $(r, 0, 0)$
- Coordonnées sphériques en fonction des coordonnées cartésiennes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \theta = \arctang \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad , \quad \varphi = \arctang \left(\frac{x}{y} \right)$$

Avec $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

θ est appelé colatitude (angle complémentaire de la latitude) ou zénith.

φ est appelé la longitude ou l'azimut.

Elément de surface sur la sphère: $dS = r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$

Elément de volume : $dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$

1.6.Applications

1. Calculer le périmètre d'un cercle C de rayon R (intégrale simple).

Solution:

On a: $dl = R d\theta$, d'où

$$C = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$

2. Calculer l'aire d'un disque D de rayon R (intégrale double de surface).

On' a : $dS = d\rho \rho d\theta$ d'où

Solution :

$$D = \int_0^{2\pi} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^R \rho \, d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$

3. Calculer le volume d'un cylindre V de rayon R et de hauteur H (intégrale triple de volume).

On 'a $dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$ d'où

Solution :

$$V = \iiint_0^H \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz = \pi R^2 H$$

4. Calculer l'aire d'une demi-sphère D de rayon R (sans le disque horizontal) (intégrale double de surface).

On 'a : $dS = R \, d\theta \, R \sin \theta \, d\varphi$ d'où

Solution :

$$D = \iint R^2 \, d\theta \, \sin \theta \, d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^\pi d\varphi = 2\pi R^2$$

5. Calculer le volume d'une sphère V de rayon R (intégrale triple de volume).

On 'a : $dV = r \, dr \, r \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$ d'où

Solution :

$$V = \iiint_0^{2\pi} R^2 \, dr \, \sin \theta \, d\varphi \, d\theta = \int_0^R R^2 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} 2 \, 2\pi = 4 \frac{R^3}{3}$$

1.7. Opérateurs

1.7.1: Gradient

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ (ou encore $\vec{\nabla}$), est une grandeur mathématique qui agit sur une fonction $f(x, y, z)$. L'opérateur nabla ($\vec{\nabla}$) est défini comme :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1-9)$$

- Sur une fonction comme: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ (1-10)

on en déduit $df = (\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot d\vec{M}$ (1-11)

relation que l'on utilise pour définir le gradient dans un système de coordonnées quelconques.

1.7.2. Coordonnées cartésiennes

Lorsqu'il agit sur les fonctions algébriques, les transforme en fonctions vectorielles

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} \quad (1-21)$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) \quad (1-22)$$

Et transforme les fonctions vectorielles en fonctions algébriques

$$\vec{V} = (f(x, y, z) \vec{i} + g(x, y, z) \vec{j} + h(x, y, z) \vec{k})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (f(x, y, z) \vec{i} + g(x, y, z) \vec{j} + h(x, y, z) \vec{k}) \quad (1-23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial z} = \text{div} \vec{V} \quad (1-24)$$

* Si $f(x, y, z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (1-25)$$

Exemple : Calculer le gradient de la fonction $f(x, y, z) = 3x^2y^3z$

$$\text{Réponse : } \overrightarrow{\text{grad}} f = 6xy^3z \vec{i} + 9x^2y^2z \vec{j} + 3x^2y^3 \vec{k}$$

1.7.3.Coordonnées cylindriques : $f = f(r, \theta, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = (\overrightarrow{\text{grad}} f)_r \vec{e}_r + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_\theta \vec{e}_\theta + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_z \vec{e}_z \quad (1-26)$$

$$d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \quad (1-27)$$

On en déduit

$$df = (\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{M}) = (\overrightarrow{\text{grad}} f)_r dr + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_\theta r d\theta + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_z dz \quad (1-28)$$

$$\text{or } df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (1-29)$$

1.7.4.Coordonnées sphériques : $f = f(r, \theta, \phi)$

Un calcul analogue au précédent donne :

$$\vec{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta r} \\ \frac{1}{r} \frac{\delta f}{\delta \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\delta f}{\delta \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{pmatrix} \quad (1-29)$$

1.7.5.Propriétés :

Les surfaces de niveau sont définies par

$$f(x, y, z) = \text{cte.}$$

1.7.6.Direction du gradient :

Soit une surface de niveau $f(x, y, z) = \lambda$.

Pour un point M se déplaçant sur cette surface, on a :

$$df = (\vec{\text{grad}} f) \cdot d\vec{M} = 0 \quad (1-31)$$

Le vecteur $\vec{\text{grad}} f$ est donc normal à la surface de niveau

1.7.7.Sens du gradient :

Soit deux points M1, M2 sur deux surfaces de niveau voisines $f = \lambda_1$ et $f = \lambda_2 > \lambda_1$.

On a :

$$df = \lambda_2 - \lambda_1 = (\vec{\text{grad}} f) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} > 0 \quad (1-32)$$

Le vecteur $\vec{\text{grad}} f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

1.7.8.Circulation d'un gradient :

$$\zeta(\widehat{AB}) = \int_{AB} \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{M} = \int_{f(A)}^{f(B)} df \quad (1-33)$$

$$\int_{AB} \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{M} = f(B) - f(A) \quad (1-34)$$

Elle est égale à la variation de la fonction f et ne dépend pas du chemin parcouru. Cette relation facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long d'un chemin. Encore faut-il que ce vecteur soit un gradient. On montre que, pour qu'un vecteur $\vec{V}$ soit un champ de gradient, il faut et il suffit que les dérivées partielles croisées de ses composantes soient égales deux à deux, soit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z}.$$

Dans le cas particulier d'un parcours fermé, on a : $\zeta(\widehat{AA}) = \int_{AA} \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{M} = 0 \quad (1-35)$

1.8. La Divergence

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant : $\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (scalaire)

1.8.1. Coordonnées cartésiennes :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1-36)$$

1.8.2. Coordonnées cylindriques :

On montre que $\text{div} \vec{V}$ peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\delta(rV_r)}{\delta r} + \frac{\delta V_\theta}{\delta \theta} \right] + \frac{\delta V_z}{\delta z} \quad (1-37)$$

1.8.3. Coordonnées sphériques :

Une expression simplifiée de $\text{div} \vec{V}$ est donnée par :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\delta(r^2 V_r)}{\delta r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\delta V_\theta \sin \theta}{\delta \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\delta V_\varphi}{\delta \varphi} \quad (1-38)$$

1.8.4. Divergence et flux d'un vecteur :

Par définition, la différentielle du flux de $\vec{V}$ à travers une surface fermée (S) est reliée à la divergence de $\vec{V}$ par : $d\Phi = \text{div} \vec{V} \cdot d\tau$ (1-39)

où $d\tau$ représente un volume élémentaire : la divergence d'un champ vectoriel représente le flux de ce vecteur sortant de l'unité de volume.

On en déduit :

$$\Phi = \oint_{(S)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{V} \cdot d\tau \quad (1-40)$$

Cette formule, dite de Green-Ostrogradsky facilite parfois le calcul du flux d'un vecteur à travers une surface fermée.

Exemple: Calculer la divergence de la fonction vectorielle

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

$$\text{Réponse : } \text{div} \vec{V} = 2y - 3z^2$$

1.9. Le Rotationnel

L'opérateur $\vec{\text{Rot}}$ (ou encore $\nabla \wedge$) associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit vectoriel de ∇ par ce vecteur : $\vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ (1-41)

1.9. 1.Coordonnées cartésiennes :

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant:

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1-42)$$

1.9. 2.Coordonnées cylindriques :

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_r = \frac{1}{r} \frac{\delta V_z}{\delta \theta} - \frac{\delta V_\theta}{\delta z} \quad (1-43)$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_\theta = \frac{\delta V_r}{\delta z} - \frac{\delta V_z}{\delta r} \quad (1-44)$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\delta(rV_\theta)}{\delta \theta} - \frac{\delta V_r}{\delta \theta} \right] \quad (1-45)$$

1.9. 3.Coordonnées sphériques :

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\delta(\sin \theta V_\varphi)}{\delta \theta} - \frac{\delta V_\theta}{\delta \varphi} \right] \quad (1-46)$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\delta V_r}{\delta \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\delta(rV_\varphi)}{\delta r} \quad (1-47)$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\delta(rV_\theta)}{\delta r} - \frac{\delta V_r}{\delta \theta} \right] \quad (1-48)$$

1.9. 4.Rotationnel et circulation d'un vecteur :

Par définition, la différentielle de la circulation de $\vec{V}$ sur un contour fermé (C) est relié au rotationnel de $\vec{V}$ par : $d\mathbb{C} = (\vec{\text{Rot}} \vec{V}) \cdot d\vec{S}$. (1-50)

où dS est un élément d'une surface quelconque (S) qui s'appuie sur (C).

Cette relation permet de définir la coordonnée du rotationnel dans une direction quelconque de vecteur unitaire $\vec{n}$.

$$\text{On en déduit : } \mathbb{C} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{M} = \iint (\vec{\text{Rot}} \vec{V}) \cdot d\vec{S} \quad (1-51)$$

Cette formule, dite de Stokes facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé.

Exemple: Calculer le rotationnel du vecteur :

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

$$\text{Réponse : } \overrightarrow{\text{Rot } V} = (27xy^2 - 6yz)\vec{i} - 9y^3\vec{j} - 2x\vec{k}$$

1.10. Le Laplacien:

1.10. 1. Définitions :

1.10. 2. En coordonnées cartésiennes :

$$\text{L'opérateur Laplacien (noté } \Delta \text{) est défini par : } \Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \quad (1-52)$$

Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla}(f) = \overrightarrow{\nabla}^2(f) = \overrightarrow{\Delta}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1-53)$$

$$\text{ou à un vecteur : } \overrightarrow{\Delta} \vec{V} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \quad (1-54)$$

L'intérêt de tous ces opérateurs vectoriels est d'une part, de permettre une écriture concise des équations dites « locales » (exemple : équations de Maxwell), et d'autre part, de faciliter les calculs, grâce aux relations vectorielles qui existent entre eux, et aux transformations intégrales qu'ils permettent d'effectuer.

1.11. Relations Vectorielles

f et A étant des fonctions scalaires, on a :

$$1-\text{div}(\vec{f} \cdot \vec{A}) = f \cdot \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (1-55)$$

$$2-\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f} \cdot \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{A} + f \cdot \overrightarrow{\text{rot}} A \quad (1-56)$$

$$3-\overrightarrow{\text{rot}} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0} \quad (1-57)$$

$$4-\text{div} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{0} \quad (1-58)$$

$$5-\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \quad (1-59)$$

$$6- \overrightarrow{\text{grad}}(f A) = f \overrightarrow{\text{grad}} A + A \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (1-60)$$

$$7- \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f \quad (1-61)$$

$$8- \overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (1-62)$$

1.12. Transformations Intégrales

Théorème de Stokes (ou du rotationnel) : (S) s'appuie sur (C) .

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (1-63)$$

Théorème de Green-Ostrogradsky (ou de la divergence) : [(τ) volume englobé par (S)]

$$\oiint_{S(\text{Fermée})} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{A} \cdot d\tau \quad (1-65)$$

$$\text{Formule du gradient} : \iiint \overrightarrow{\text{grad}} f \, d\tau = \iint f \, d\vec{S} \quad (1-66)$$

$$\text{Formule du rotationnel} : \iiint \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A} \, d\tau = \iint d\vec{S} \wedge \vec{A} \quad (1-67)$$

Exemple1

On considère le champ vectoriel

$$\vec{V} = (ax + by)\vec{e}_x + (cx + fy)\vec{e}_y$$

et le contour fermé ABCDA précisé sur la figure.

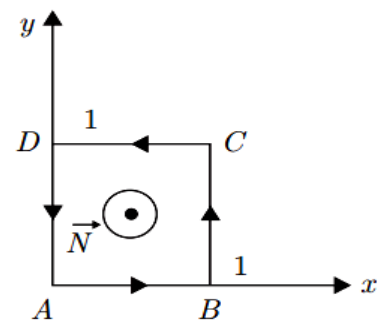
Vérifier le théorème de Stokes en calculant la circulation de V sur ce contour

On a d'une part :

$$\zeta = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 ax \, dx + \int_0^1 (c + fy) \, dy + \int_1^0 (ax + b) \, dy + \int_1^0 fy \, dy = c - b$$

$$\text{et d'autre part : } \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \cdot \vec{N} \cdot dS$$

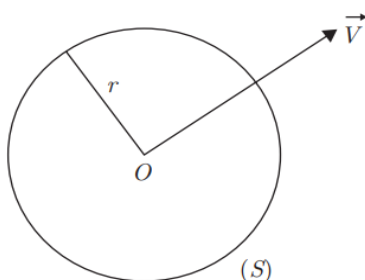
$$\text{et comme : } \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} = (c - b) \vec{e}_z, \quad \text{et} \quad \vec{N} = \vec{e}$$



il vient : $\iint \text{Rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_0^1 (c - b) dx dy = c - b$

Exemple 2

On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique : $\vec{V} = a \vec{r}$ et la sphère de rayon r centrée en O . Vérifier le théorème d'Ostrogradsky en calculant le flux de $\vec{V}$ à travers la surface de la sphère.



On a d'une part: $\Phi = \iint \vec{V} \cdot d\vec{S} = a \cdot r \iint \vec{e}_r \cdot \vec{N} dS$

D'autre part : $\text{div } \vec{V} = \frac{2}{r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} = 2a + a = 3a$

On en déduit : $\iiint_{\tau} \text{div } \vec{V} d\tau = 3a \iiint_{\tau} d\tau = 4\pi a r^3$

Exercices Corrigés

Exercice 01:

(Elément de longueur en coordonnées cylindriques: $M(\rho, \theta, z)$)

En exprimant dx, dy, dz ,en fonction des coordonnées cylindriques retrouver l'expression de $(dl)^2$ dans ce système de coordonnées.

Solution

Exercice 01:

1- On coordonnées cartésiennes on a:

$$\vec{MO} = \vec{l} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{OM} = d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

1- On coordonnées cylindriques ,ou semi polaires $M(\rho, \theta, z)$

$$l \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \text{ et } dl \begin{cases} dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta \\ dz = dz \end{cases}$$

On a aussi : $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$\Rightarrow dl^2 = (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta)^2 + (dz)^2$$

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$\vec{dl} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

Exercice 02 : Trouver la fonction primitive de $f(x) = \frac{x}{(x^2+b)^{\frac{3}{2}}}$

Solution

Calcul de la primitive de $f(x) = \frac{x}{(x^2+b)^{\frac{3}{2}}}$

$$F(x) = \int f(x) dx + C,$$

$$\text{On pose } X = x^2 \Rightarrow dX = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dX}{2}$$

$$F(x) = \int f(x) dx + C = \int x \cdot (x^2 + b)^{-\frac{3}{2}} + C = \int \frac{dX}{2} (X + b)^{-\frac{3}{2}} + C$$

$$F(x) = + \frac{1}{2} (-2)(X + b)^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{(x+b)^{\frac{1}{2}}} + C$$

Exercice 03: (intégrales doubles)

Calculer les intégrales suivantes

$$1- I = \iint_D xy dx dy \text{ Avec } D_1 = [0,1] \times [0,1], \text{ figure -a}$$

$$1- II = \iint_D xy dx dy$$

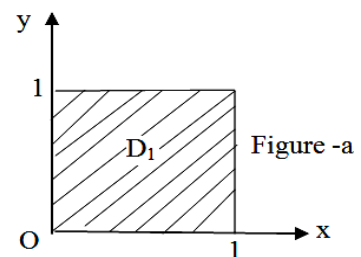
Avec $D_2 = \{(x,y), 0 \leq x \leq 1, \text{ et } x - y \geq 0\}$, figure -b

Solution

$$I = \iint_D xy dx dy$$

Avec $D_1 = [0,1] \times [0,1]$

$$I_1 = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



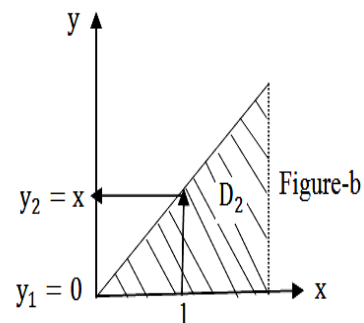
$$I = \iint_D x y \, dx \, dy$$

$$\text{Avec } D_2 = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, \text{ et } x - y \geq 0\}$$

$$I = \int_0^1 x \, dx \int_{y_1=0}^{y_2=x} y \, dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx$$

$$I = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

On peut remarquer que $I = \frac{1}{2}$ surface du triangle $D_2 =$ surface du rectangle $\frac{D_1}{2}$.



Exercice 04:

Calculer 1-La longueur d'un cercle de centre O et de rayon R : (0,r)

2-La surface d'un cercle de centre O et de rayon R : (0,r)

3-Le volume d'une sphère de centre O et de rayon R : (0,r)

Solution

1-Calcul de la longueur d'un cercle de centre O ,rayon r

$r = \text{constante}$

$$\widehat{MM'} = dl = r \, d\theta$$

L'angle θ varié entre 0 et 2π

$$l = \int dl = \int_0^{2\pi} r \cdot d\theta = r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot r$$

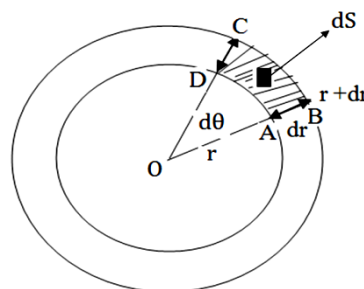
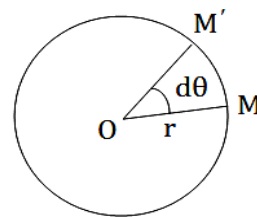
Périmètre d'un cercle de centre O ,rayon r: $P = 2\pi R$

2-Calcul de la surface d'un cercle de centre O ,et de rayon $r = \text{constante}$

$$0 \leq r \leq R$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{L'élément } dS = AB \cdot \widehat{CD} = dr \cdot r \, d\theta$$



$$S = \iint dS = \iint r \, dr \, d\theta = \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2$$

3- Calcul du volume d'une sphère (O,R)

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

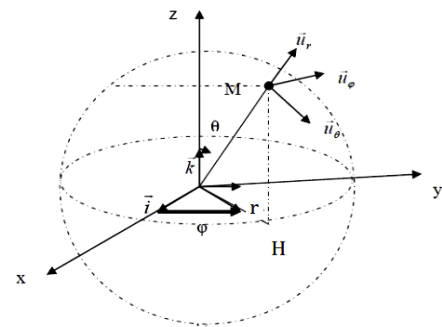
Le volume élémentaire:

$dV = dx \, dy \, dz$ (en coordonnées cartésiennes)

En Coordonnées sphériques

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$\iiint dV = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3$$



Exercice 05: (Intégrales Doubles, Triples)

1- $I = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$

Avec $D = \{(x,y) | (x^2 + y^2) \leq 1, y \geq 0\}$, figure -a

2- $\Pi = \iiint_D x \, y \, z \, dx \, dy \, dz$

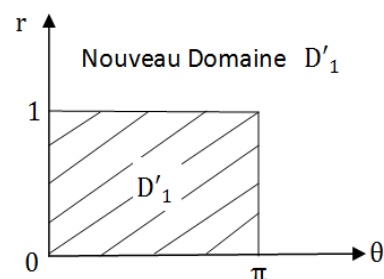
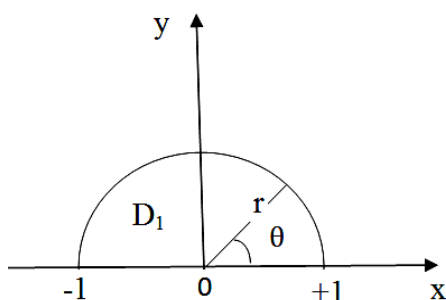
Avec $D = \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, figure -b

Solution

1

$$I = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$\text{Avec } D_1 = \{(x,y) | (x^2 + y^2) \leq 1, y \geq 0\}$$



en passant $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow D'_1 = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq 1, \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi\}$

$$I = \iint_{D'_1} (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D'_1} r^2 \cdot r dr d\theta$$

$$I = \int_0^1 r^3 dr \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{4}$$

2

$$II = \iiint_D x y z dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$II = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy \cdot \int_0^1 z dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Exercice 06:

1.1. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$$

Calculer la circulation de A entre les points (0,0,0) et (1,1,1) le long des chemins suivants :

- a) le segment de droite joignant ces deux points,
- b) les segments de droite allant de (0,0,0) à (1,0,0) puis de (1,0,0) à (1,1,0) et enfin de (1,1,0) jusqu'à (1,1,1).

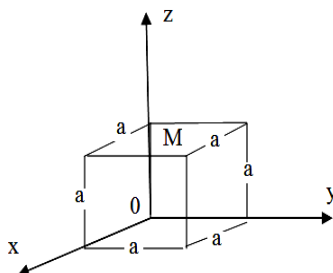
Ce champ vectoriel est-il un gradient ?

Solution

$$\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$$

a) Sur le segment de droite joignant (0,0,0) et (1,1,1), on a : $x = y = z$. On peut donc écrire :

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \int_0^1 (3x^2 + 6y)dx - \int_0^1 14yz dy + \int_0^1 20xz^2 dz = \frac{13}{3}$$



b) De (0,0,0) à (1,0,0) : $y = 0$, $z = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$

$$\oint_1 = \int_0^1 3x^2 dx = 1$$

- de (1,0,0) à (1,1,0) : $x = 1$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$, $\Rightarrow \oint_2 = 0$

- de (1,1,0) à (1,1,1) : $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0$, $dy = 0$

$$\oint_3 = \int_0^1 20z^2 dz = \frac{20}{3}$$

$$-\oint = \oint_1 + \oint_2 + \oint_3 = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

Comme la circulation entre les deux points (0,0,0) et (1,1,1) dépend du chemin suivi, $\vec{A}$ n'est pas un gradient.

Exercice 07:

On considère le champ vectoriel :

$$\vec{V} = (2x - y) \vec{e}_x - (2y - x) \vec{e}_y - 4z \vec{e}_z$$

Montrer que ce champ est un gradient, et déterminer la fonction scalaire φ dont il dérive par la relation $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$.

Solution

$$\vec{V} = (2x - y) \vec{e}_x - (2y - x) \vec{e}_y - 4z \vec{e}_z$$

On 'a

$$V_x = 2x - y, V_y = 2y - x, V_z = -4z$$

$\frac{\partial V_x}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial V_z}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial V_y}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial V_z}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial V_x}{\partial z} = 0$ ($\vec{V}$ est bien un champ de gradient) .

• Détermination de la fonction φ .

$$\text{On 'a : } d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$\text{et aussi : } d\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi \cdot d\vec{M} = \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

On 'a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - y \Rightarrow \varphi = x^2 - yx + f(y, z)$$

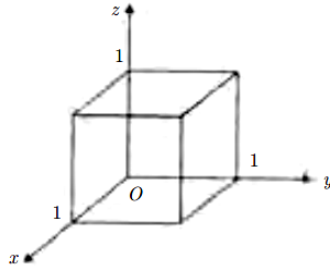
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x \Rightarrow f = y^2 + g(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} - 4z \Rightarrow g = -2z^2 + C \text{ (où } C \text{ est une constante arbitraire) .}$$

On en déduit finalement : $\varphi = x^2 - yx + y^2 - 2z^2 + C$

Exercice 08:

Calculer le flux du champ de vecteurs : $\vec{V}(M) = 4xz \vec{e}_x - y^2 \vec{e}_y + yz \vec{e}_z$ à travers la surface du cube limité par $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.



Solution

Pour montrer que $\vec{V}$ est un gradient, il suffit de vérifier que les dérivées croisées de ses composantes sont égales deux à deux.

On a: $\vec{V}(M) = 4xz \vec{e}_x - y^2 \vec{e}_y + yz \vec{e}_z$

a) Face $x = 1$: $dS = dy dz$, $\vec{n} = \vec{e}_x$

$$\Phi_1 = \int_0^1 4z dz \int_0^1 dy = 2$$

b) Face $x = 0$: $dS = dy dz$, $\vec{n} = -\vec{e}_x \Rightarrow \Phi_2 = 0$

c) Face $y = 1$: $dS = dx dz$, $\vec{n} = \vec{e}_y$

$$\Phi_3 = - \int_0^1 dx \int_0^1 dz = -1$$

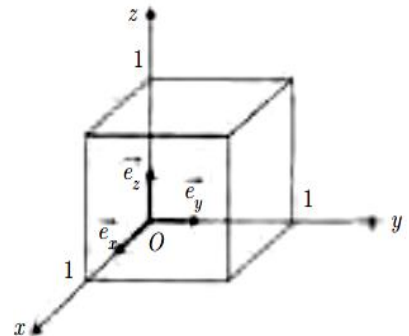
d) Face $y = 0$: $dS = dx dz$, $\vec{n} = -\vec{e}_y \Rightarrow \Phi_4 = 0$

e) Face $z = 0$: $dS = dx dy$, $\vec{n} = -\vec{e}_z \Rightarrow \Phi_5 = 0$

f) Face $z = 1$: $dS = dx dy$, $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$\Phi_6 = \int_0^1 y dy \int_0^1 dx = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_{\text{Total}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 = \frac{3}{2}$$



Exercice 09

Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs: $\vec{V} = 2y \vec{e}_x + 3x \vec{e}_y - z^2 \vec{e}_z$, dans le cas où S est la surface de l'hémisphère supérieur d'équation: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, et (C) le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère.

Solution

Théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \int_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{V} \cdot \vec{d}S \\ &= \vec{V} = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z\end{aligned}$$

a) Calcul du rotationnel :

On a ici : $\text{rot} \vec{V} = \vec{e}_z$

$d\vec{S} = dS \cdot \vec{N}$, $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, $\vec{N} = \vec{e}_r$

$$\mathcal{C} = \iint \text{rot} \vec{V} \cdot \vec{N} dS = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 = 9\pi$$

b) Calcul direct :

On a : $d\vec{\ell} = R d\alpha \vec{e}_\alpha$ où $\vec{e}_\alpha$ est le vecteur unitaire porté par la tangente à (C) .

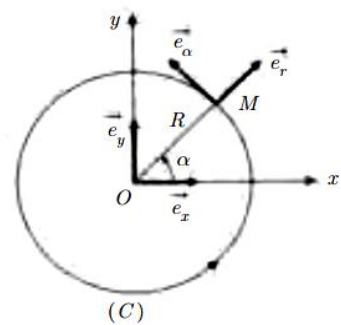
$$\vec{e}_\alpha = -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{\ell} = -2y(\sin \alpha) R d\alpha + 3x(\cos \alpha) R d\alpha$$

Avec : $x = r \cos \alpha$, et $y = r \sin \alpha$

On en déduit : $\mathcal{C} = \int \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= -2R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha + 3R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \\ &= -2\pi R^2 + 3\pi R^2 = \pi R^2 = 9\pi\end{aligned}$$



Chapitre 2. Electrostatique

2. Généralités

2.1.a. Phénomènes électrostatiques: Les phénomènes électrostatiques sont des phénomènes naturels que l'homme rencontre dans sa vie quotidienne comme l'attraction de petits objets en papier par des corps frottés, l'écartement d'un filet d'eau par un peigne après avoir peigner les cheveux ...etc.

Thalès fût le premier à constater (600 ans avant J.C.) qu'une baguette d'ambre frottée attire des morceaux de paille.



Figure (2.1) : Phénomènes électrostatiques

Le mot "électricité" vient du grec "elektron" qui signifie "ambre". L'électrostatique est l'étude de l'électricité à l'état statique.

2.1.b. Processus d'électrisation: L'électricité statique est obtenue par frottement ou par contact.

2.1.c . Electrification par frottement: Soient les corps suivants:



Verre frotté avec de la soie (**A**) Ambre frotté avec de la fourrure (**B**) Boule de liège (**C**)

On réalise les expériences suivantes:

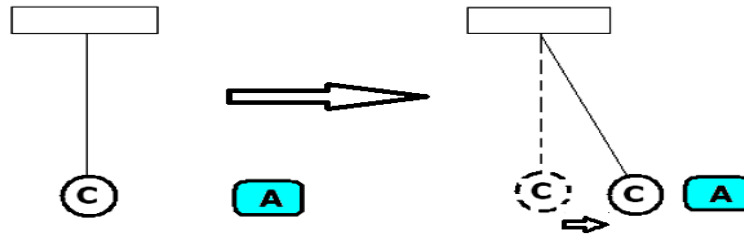


Figure (2.2): attraction entre des charges

Entre les corps **C** et **A** se produit un phénomène **d'attraction**.

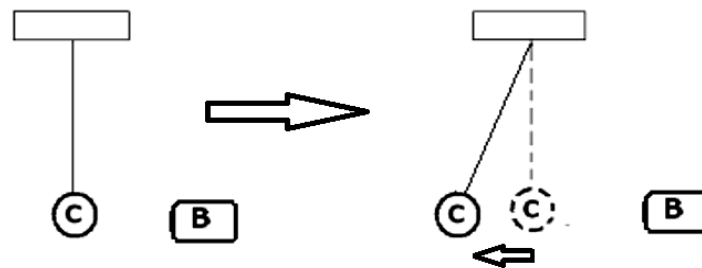


Figure (2.3): répulsion entre des charges

Entre les corps **C** et **B** se produit un phénomène de **répulsion**.

Ces deux phénomènes sont des processus **d'électrisation par frottement**.

Dans la nature, il y a deux types d'électricité : une électricité négative (ambre) et une électricité positive (verre). On aurait pu les appeler " verte" et "rouge".



2.1.d . Electrification par contact

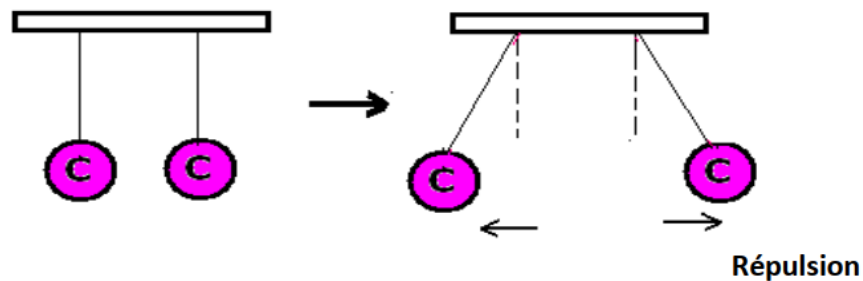
Soient les corps suivants: Deux boules de liège ayant subi un contact avec A (déjà frotté avec de la soie)



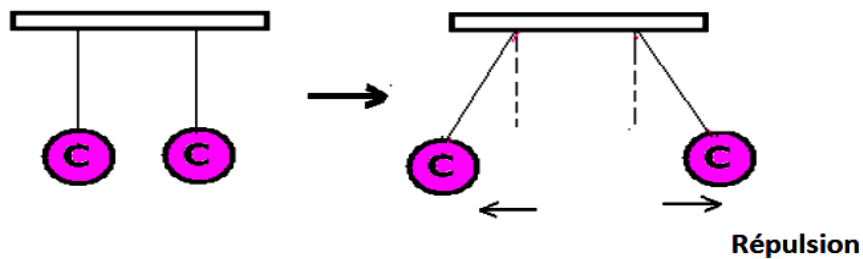
et deux autres boules de liège ayant subi un contact avec B (déjà frotté avec de la fourrure).



On réalise les expériences suivantes:



Les deux boules C mises en contact avec le **corps A**



Les deux boules C mises en contact avec le **corps B**

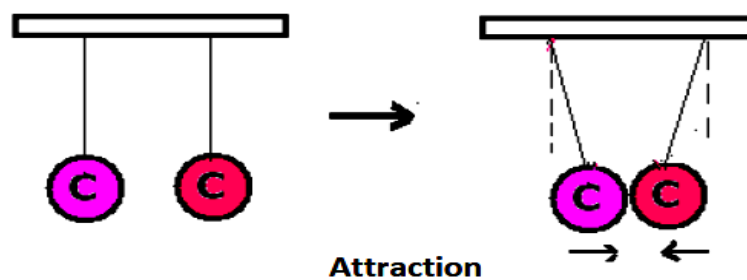


Figure (2.4): Electrification par Contact

Une boule C mise en contact avec A et l'autre boule C avec B. Ces deux phénomènes sont des processus d'électrification par contact.

On constate d'après ces expériences que : Deux charges de même nature (même signe) se repoussent et deux charges de nature différentes s'attirent.

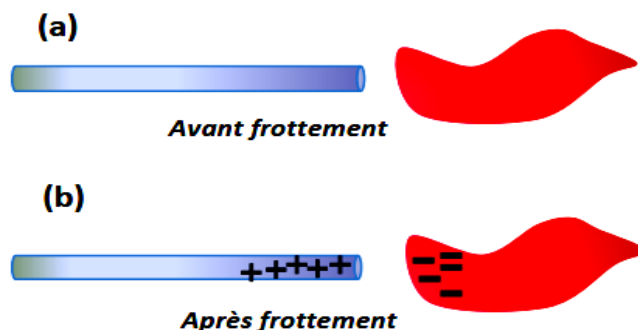
2.1.e. Origine d'électrisation

Les processus d'électrisation s'expliquent par le transfert de charges élémentaires (électrons).

-Dans le cas du frottement

- **Verre + soie** : les électrons passent du verre vers la soie, donc le verre est chargé positivement et la soie négativement.

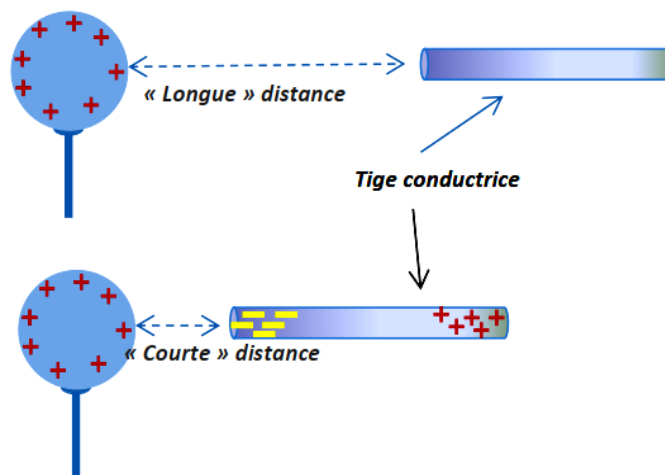
- **Ambre + fourrure** : les électrons passent de la fourrure vers l'ambre, donc la fourrure est chargée positivement et l'ambre négativement.



Figure(2.5): Electrification par frottement

2.1.f. Electrification par influence

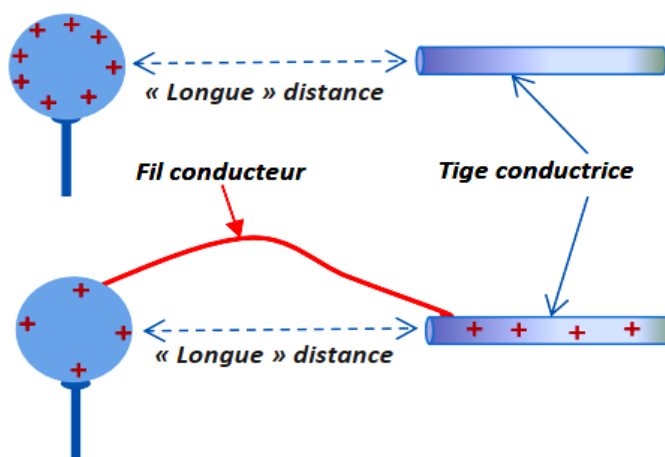
Considérons la configuration présentée sur la figure(2.6). La boule chargée positivement influence sur les électrons libres dans la tige conductrice (voir section ----). Elle les attire vers elle et « repousse » les charges positives vers l'autre côté. En fait, les charges positives ne sont pas repoussées mais la migration des électrons, sous l'influence de la charge de la boule, laisse les atomes perdant de charges négatives comme des ions positifs. On appelle ce phénomène l'électrification par influence.



Figure(2.6): Electrification by influence

2.1.h. Electrification by conduction

Si maintenant on relie entre la boule chargée positivement et la tige électriquement neutre par un fil métallique (voir figure (2.7), on constate alors que la tige se trouve électrisée positivement et que l'électrification de la boule a diminuée par une charge égale à celle de la tige. La charge électrique a été transmise par le fil métallique. On dit que le fil est un conducteur électrique et que la tige est électrisée par conduction (un conducteur est un matériau où la charge circule facilement). On appelle ce phénomène l'électrification par conduction.



Figure(2.7): Electrification by conduction

2.2. Série triboélectrique: C'est une série de matériaux naturels ou synthétiques obtenue expérimentalement:

.....- verre – mica – laine - poil de chat – bois – ambre – résine – soufre -

Si on frotte le corps "**n**" dans la série avec le corps "**n+1**" ou plus, le corps "**n**" se charge positivement et le corps "**n+1**" se charge négativement .

2.3. Charges électriques: Du point de vue électrique, dans la nature, il existe trois types de corps:

- Corps électriquement neutre: le nombre de charges positives est égal au nombre de charges négatives.
- Corps électriquement positif: le nombre de charges positives est supérieur au nombre de charges négatives.
- Corps électriquement négatif: le nombre charges positives est inférieur au nombre de charges négatives.

2.3.1. Propriétés des charges électriques

- La charge électrique d'un corps (q) est quantifiée : La charge électrique d'un système ne peut prendre que des valeurs multiples de la charge élémentaire e ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) : **$q = n e$**
- L'unité de la charge électrique et le coulomb notée C.
- La charge totale d'un atome est nulle (il y a autant d'électrons que de proton).
- La charge électrique d'un corps est égale à la somme algébrique des charges qui le constituent.
- La charge électrique totale d'un système isolé (n'échangeant pas de matière avec le milieu extérieur) est constante. C'est **la conservation de la charge** électrique.
- Charges ponctuelles: dimensions négligeables par rapport aux distances entre les charges.

2.4. Conducteur – Isolant

- Isolant ou diélectrique : les électrons sont fortement liés aux atomes, il n'y a pas d'électron libre. Lorsque une charge électrique est créée, elle ne peut pas se déplacer (bois, verre, papier ...).
- **Conducteur** (liaison métallique) : toute charge créée sur un matériau se répartit sur la surface. Les électrons libres permettent le déplacement de cette charge.

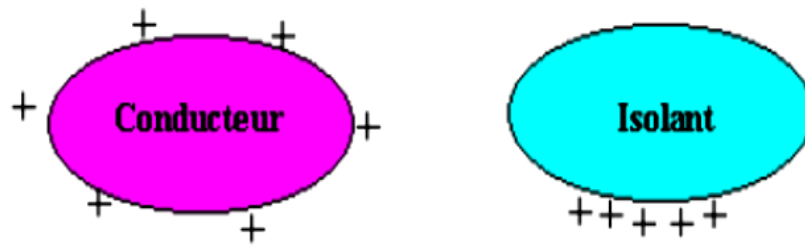


Figure (2.8) : Répartition des charges électriques (conducteur et isolant)

2.5. Structure de la matière

La matière est constituée d'atomes, d'ions et de molécules. Chaque atome est composé d'un noyau autour duquel gravitent des électrons. Electriquement, l'atome est neutre. L'électron (découvert en 1909 par **Millikan**) est la charge élémentaire négative et vaut $e = - 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ (Coulombs).

Le noyau (découvert en 1911 par **Rutherford**) est constitué de particules chargées positivement (protons) et de particules électriquement neutres (neutrons). Ces derniers ont été découverts par **Chadwick** en 1932 .

Les protons et les neutrons sont appelés "**nucléons**".

2.5.1 Atome

Z = nombre d'électrons

A = nombre de nucléons

$N = A - Z$ = nombre de neutrons

Dans la nature il y'a des molécules simples

(composées de mêmes atomes comme H_2) et des

molécules composées (constituées d'atomes différents : H_2O).

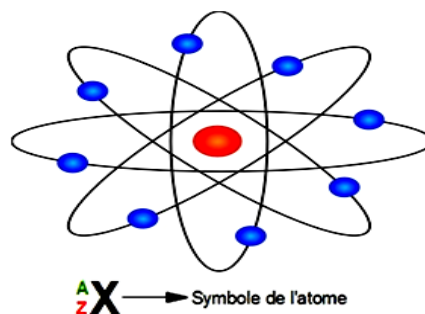


Figure (2.9) : Constitution schématique d'un atome

Particule	Charge	Masse
Electron	$-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	$+1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	0 C	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Tableau (2.1): Les valeurs Charges et Masses

N.B: La masse du proton est 1850 fois plus grande que celle de l'électron.

Les baryons sont les protons et les neutrons. Chaque baryon est constitué de 3 quarks. Il existe 2 types de quarks: les quarks up ou quarks U de charge $+2e/3$ et les quarks down ou quark d de charge $-e/3$.

* Un proton est constitué de deux quarks U et d'un quark d , ce qui donne une charge de proton égale à : $2e/3 + 2e/3 - e/3 = e$

* Un neutron est constitué de 2 quarks d et d'un quark U , ce qui donne une charge de neutron égale à : $2e/3 - e/3 - e/3 = 0$.

2.6. Conservation et quantification de la charge électrique

Les charges électriques élémentaires étant permanentes, si un corps chargé est isolé, c'est-à-dire s'il ne peut pas échanger de charges avec l'extérieur, sa charge électrique reste constante. Ceci constitue la loi de conservation de la charge.

Millikan a montré que toute charge électrique est quantifiée : n'existe que sous forme de multiples d'une charge élémentaire e .

2.6. 1. les charges ponctuelles : supposées sans dimension, ce qui est analogue à l'hypothèse du point matériel en mécanique.

2.6.2. les distributions continues de charge : hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale (dq), à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.

On définit ainsi les densités :

2.6.2a . linéique: sur un fil : $\lambda = \frac{dq}{dl} \quad [C \cdot m^{-1}]$ (2-1)

2.5.2b. surfacique: (ou superficielle) sur une surface : $\sigma = \frac{dq}{dS} [C \cdot m^{-2}]$ (2-2)

2.6.2c. volumique: dans un volume : $\rho = \frac{dq}{d\tau} [C \cdot m^{-3}]$. (2-3)

auxquelles correspondent respectivement les charges infinitésimales : λdl , σdS , et $\rho d\tau$

Exemple : Calculer la charge électrique contenue dans 1 mm^3 de cuivre.
Données : nombre d'Avogadro $N_A = 6.02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$, masse volumique du cuivre $8.9.10^3 \text{ kg/m}^3$, $Z = 29$

2.7. Les forces de la nature

Dans la nature il y a quatre types de forces dont deux sont d'origine électriques :

- ✓ **Forces nucléaires faibles** : assurent la cohésion des baryons (quark - quark)
- ✓ **Forces nucléaires fortes** : assurent la cohésion du noyau (proton - neutron)
- ✓ **Forces électromagnétiques** : assurent la cohésion de l'atome (noyau-électrons-quark)
- ✓ **Forces gravitationnelles** : assurent la cohésion à grande échelle de l'Univers.

2.8. Forces électriques: loi de Coulomb

2.8.1.Rappels sur la loi de gravitation universelle

Deux corps de masse m_1 et m_2 , distants de d , **s'attirent** mutuellement par une force radiale (voir figure 2-10) ,dont le module est : $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$ (2-4)

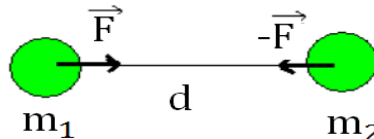


Figure (2.10): la loi de gravitation universelle

Où G est la constante de gravitation universelle ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI (N.m}^2/\text{kg}^2)$)

Si, par exemple, M est la masse de la Terre ($M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) et R son rayon ($R = 6400 \text{ km}$), la

force gravitationnelle est : $F = G \frac{m_1 M}{R^2} = m_1 g$

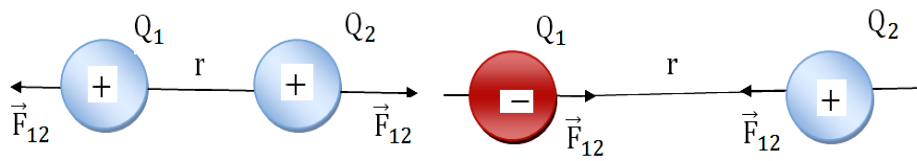
Sur la surface de la Terre, F représente le poids du corps de masse m_1 .

2.8.2.Force électrique

Deux charges électrique Q_1 et Q_2 , distantes de r , s'attirent ou se repoussent mutuellement par une force F tel que:

- ✓ F est radiale (dirigée suivant la droite joignant les deux charges)
- ✓ Proportionnelle à Q_1

- ✓ Proportionnelle à Q_2
- ✓ Inversement proportionnelle à r_2



Figure(2.11): La Force électrique

Donc le module de cette force est: $F = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ (2-5)

Avec : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ C}^{-2}$

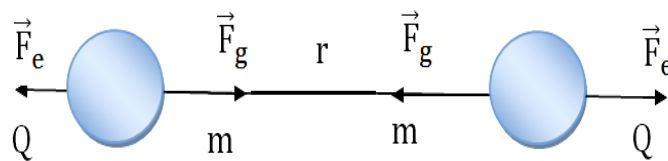
Où ϵ_0 est la permittivité du vide (elle se mesure en farads par coulomb (F/C)). Cette formule est valable dans le vide pour des charges sphériques et immobiles

N.B: Dans un milieu matériel (autre que le vide), on a : $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, avec $\epsilon = \epsilon_r - \epsilon_0$

où ϵ_r est la permittivité relative du milieu et ϵ_0 celle du vide ($\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi C^2} = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$)

Exemple 1:

Soient deux électrons dans le vide et distants de (r). Comparez les forces gravitationnelle et électrique qui s'exercent sur ces 2 particules.



On a : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, et $Q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

La force électrique est répulsive et vaut: $F_e = K \frac{Q^2}{r^2}$

La force gravitationnelle est attractive et vaut: $F_g = G \frac{m^2}{r^2}$

Si on compare ces 2 forces on trouve: $\frac{F_e}{F_g} = \frac{KQ^2}{Gm^2} = 4,17 \cdot 10^{42}$

Donc la force d'origine électrique est très importante devant la force gravitationnelle.

Note:

✓ La force électrostatique est nettement plus grande que le poids des bouts de papier attirés par la règle frottée.

✓ Il n'y a pas de collisions entre les corps célestes car ils sont électriquement neutres.

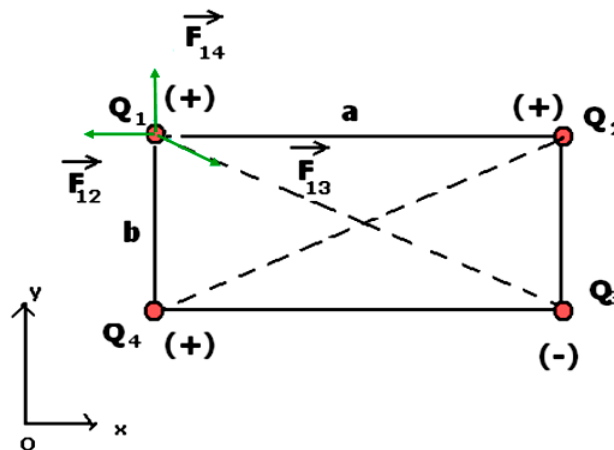
Exemple 2:

Soient quatre charges ponctuelles se trouvant aux sommets d'un rectangle de longueur $a = 4 \text{ m}$ et de largeur $b = 3 \text{ m}$. Avec : $Q_1 = 1 \text{ C}$, $Q_2 = 2Q_1$, $Q_3 = -3Q_1$, et $Q_4 = 4Q_1$.

Trouvez la direction et la grandeur de la force exercée sur la charge Q_1 par les trois charges,

Pour résoudre les exercices de ce type, on doit suivre les étapes suivantes:

- On mentionne d'abord le signe de chaque charge.
- On trace les vecteurs forces en respectant la loi de Coulomb.
- On calcule le module de chaque force.
- On choisit un repère (xOy).
- On calcule les projections de cette force (force résultante) sur les axes Ox et Oy.
- On calcule le module de la force résultante.



Les modules des forces :

$$\vec{F}_{12} = K \frac{Q_1 Q_2}{a^2} = \frac{9}{10} 10^9 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{13} = K \frac{Q_1 Q_3}{a^2 + b^2} = \frac{27}{25} 10^9 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{14} = K \frac{Q_1 Q_4}{b^2} = 4 \cdot 10^9 \text{ N}$$

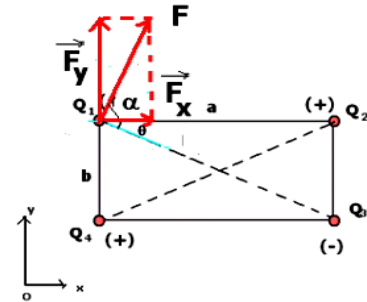
* Calcul des projections: $\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$

$$\begin{cases} F_x = F_{13} \cos \theta - F_{12} = \left(\frac{27}{25} \cdot \frac{4}{\sqrt{25}} - \frac{9}{16} \right) 10^9 \text{ N} = 0,864 \cdot 10^9 \text{ N} \\ F_y = F_{14} \sin \theta - F_{12} = \left(4 - \frac{27}{\sqrt{25}} \cdot \frac{3}{5} \right) 10^9 \text{ N} = 0,864 \cdot 10^9 \text{ N} = 3.352 \cdot 10^9 \text{ N} \end{cases}$$

* Calcul de la force résultante ainsi que sa direction:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10^{10} \sqrt{(8,64)^2 + (33,52)^2} = 34,16 \cdot 10^{10} \text{ N}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{F_y}{F_x} = 3,87 \Rightarrow \alpha = 75,5^\circ$$



2.9. Champ électrostatique

2.9.1. Rappels: champ scalaire et champ vectoriel

2.9.2. Champ de scalaires : A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on lui associe une fonction scalaire $F(x, y, z)$ comme par exemple la pression, la températureetc. L'ensemble de ces points forment un champ de scalaires.

2.9.3. Champ de vecteurs: A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on lui associe une fonction vectorielle comme par exemple la vitesse, la force, ...etc. L'ensemble de ces points forment un champ de vecteurs.

2.10. Champ électrique

En électrostatique, on appelle champ électrique une région de l'espace où, en tout point, une charge q , maintenue immobile, est soumise à l'action d'une force électrique.

On introduit alors une grandeur vectorielle $\vec{E}$ telle que : $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ (2-6)

Cette grandeur $\vec{E}$ est également appelée champ électrique.

De la même manière en mécanique, si au voisinage de la terre, où règne le champ de la pesanteur $\vec{p} = m\vec{g}$ (2-7)

On place une masse m , elle sera soumise à la force de gravitation qui, dans ce cas, n'est autre que son poids. On peut noter l'analogie entre le champ électrique $\vec{E}$ et le champ de gravitation $\vec{g}$ créé par la terre.

Seulement $\vec{g}$ est toujours dirigé vers le centre de la terre alors que le sens du champ électrique dépend du signe des charges qui le créent (figure 2.12).

Dans le cas général:

On appelle champ une région de l'espace où, en tout point, une particule est soumise à l'action d'une force.

N.B. 1°) L'existence d'un champ ne se manifeste que lorsqu'on y introduit un corps

- de masse m dans le cas la gravitation
- de charge q dans le cas de l'électrostatique.

2°) Le champ désigne :

- la région de l'espace où une particule est soumise à l'action d'une force
- la grandeur vectorielle $\vec{E}$ ou $\vec{g}$ par exemple.

2.10.1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée

Dans le cas d'une seule charge source Q , la force qui s'exerce sur la charge test q est donnée par la loi de Coulomb : $\vec{F} = K \frac{Qq}{r^2} \vec{u}$ (2-8)

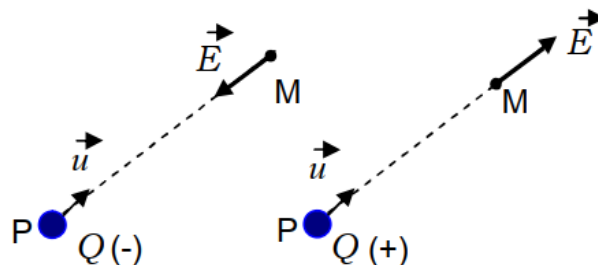


Figure (2.12) : Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée

Avec (2-7) on obtient l'expression du champ électrostatique $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u}$ (2-9)

C'est l'expression mathématique du champ électrostatique créé, au point M, par la charge source Q placée en P.

➤ L'unité de $E(M)$ est le **N/C** ou **V/m**.

➤ Si $Q > 0$, $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont dirigés dans le même sens. $\vec{E}$ s'éloigne des charges positives

➤ Si $Q < 0$, $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont dirigés dans de sens contraires. $\vec{E}$ se rapproche des charges n.
Les figures (2.7) montrent que le champ est orienté vers la charge lorsqu'elle est négative et en sens inverse lorsqu'elle est positive .

2.10.2. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

2.10.2.1. Principe de superposition

Dans le cas de n charge $q_1, q_2, \dots q_n$ situées respectivement aux points $P_1, P_2, \dots P_n$:
Le champ résultant en un point M est la somme des champs créés par chaque charge (principe de superposition):

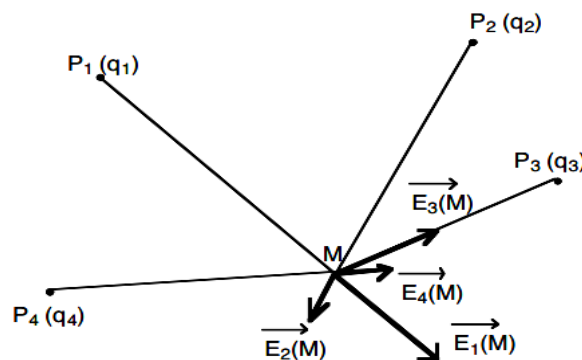


Figure (2.13): Champ électrique créée par un ensemble de charge q_i .

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = \sum_{qi=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = q \cdot \vec{E}(M) \quad (2-10)$$

$$\text{où } r_i = P_i M, \overrightarrow{P_i M} = p_i M. \vec{u}_i, \text{ et il en résulte donc } \vec{E}(M) = \sum_{qi=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (2-11)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \quad (2-12)$$

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncé comme le principe de superposition (comme tout principe, il n'est pas démontré). En pratique, cette expression est rarement utilisable puisque nous sommes la plupart du temps amenés à considérer des matériaux comportant un nombre gigantesque de particules. C'est simplement dû au fait que l'on ne considère que des échelles spatiales très grandes devant les distances inter-particulaires, perdant ainsi toute possibilité de distinguer une particule de l'autre. Il est dans ce cas plus habile d'utiliser des distributions continues de charges. Soit P un point quelconque d'un conducteur et $dq(P)$ la charge élémentaire contenue en ce point.

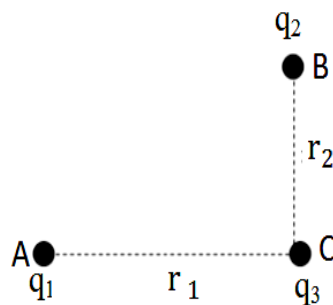
Le champ électrostatique total créé en un point M par cette distribution de charges est

$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M) \quad \text{avec} \quad d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad (2-13)$$

Mathématiquement, tout se passe donc comme une charge ponctuelle (dq) était située en un point P de la distribution, créant au point M un champ électrostatique $\vec{dE}(M)$, avec $r = PM$ et $\vec{P_iM} = p_i M \cdot \vec{u}_i$. Il s'agit évidemment d'une approximation, permettant de remplacer une somme presque infinie par une intégrale.

Exemple1 :

Trois charges q_1 , q_2 , et q_3 sont disposées selon la figure ci-dessous. Calculer la force résultantes appliquée sur la charge q_3 .



On donne : $q_1 = 1,5 \cdot 10^{-1} \text{C}$, $q_2 = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{C}$, $q_3 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{C}$, $AC=1,2\text{m}$, $BC=0,5\text{m}$.

Solution:

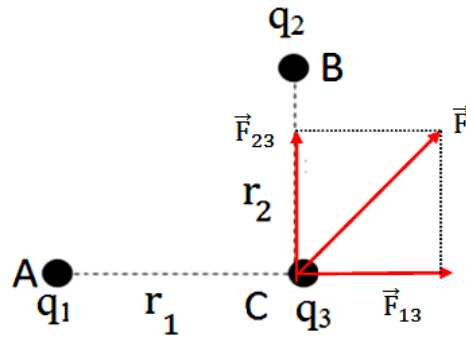
q_1 , et q_3 ont le même signe, dans ce cas $\vec{F}_1$ est répulsive.

q_2 , et q_3 ont un signe opposé, dans ce cas $\vec{F}_2$ est attractive

$$\vec{F}_{13} = K \frac{q_1 q_3}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} \Rightarrow F_{13} = 1,8 \cdot 10^3 \text{N},$$

$$\vec{F}_{23} = K \frac{q_2 q_3}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} \Rightarrow F_{23} = 3,6 \cdot 10^3 \text{N}.$$

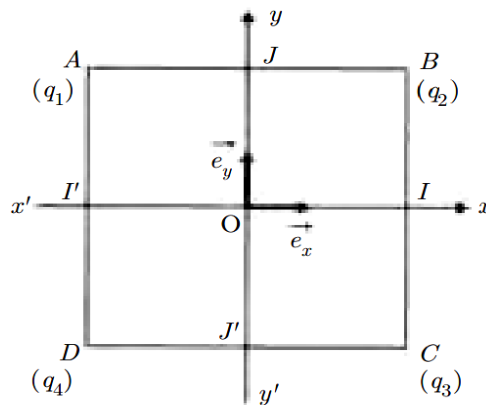
Par Conséquent: $|F| = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = 4,06 \cdot 10^3 \text{N}$



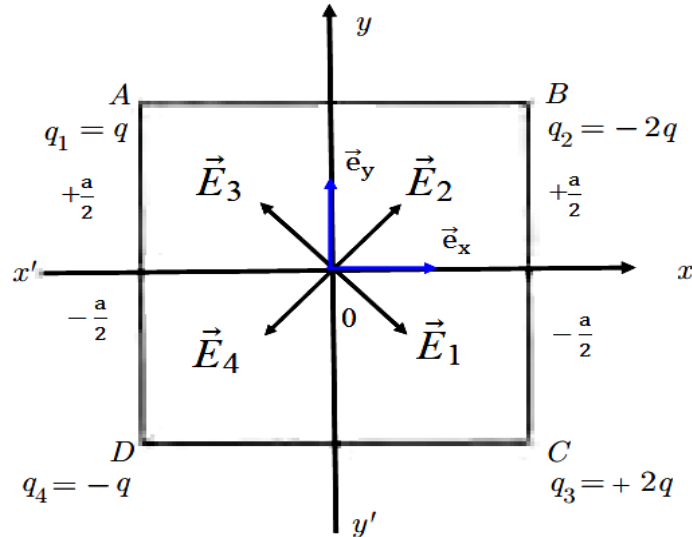
Exemple2 :

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. On donne : $q_1 = q = 10^{-8}$ C, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$, $q_4 = -q$.

1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}$.



Solution



Solution

Détermination du champ $\vec{E}$ en O.

Soit $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ et $\vec{E}_4$ les champs créés en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4 .

On a : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$

Par raison de symétrie : $\vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -2 E_1 \cos \frac{\pi}{2} \vec{e}_y = -2K \frac{4q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y = -\frac{2 K q \sqrt{2}}{a^2} \vec{e}_y$

On a de même : $\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2 E_2 \cos \frac{\pi}{2} \vec{e}_y = 2K \frac{4q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y = \frac{4 K q \sqrt{2}}{a^2} \vec{e}_y$

Soit $\vec{E} = \frac{2 K q \sqrt{2}}{a^2} \vec{e}_y$.

Le champ résultant $\vec{E}$ est donc :

– dirigé suivant l'axe $y'oy$;

– dans le sens positif de l'axe $y'oy$, de norme: Soit $E = \frac{2 K q \sqrt{2}}{a^2}$.

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \sqrt{2} = 254.6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

2.10.3. Champ créé par une distribution continue de charges.

2.10.3.1. Distributions de charges linéique

Lorsque la charge Q est répartie sur un fil avec une densité linéique λ , figure (a).

Chaque élément dl porte une charge $dQ = \lambda dl$, et crée un champ élémentaire :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dq}{r^2} \vec{u}, \quad \text{le champ créé par } Q \text{ est: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u} \quad \text{en C/m} \quad (2-14)$$

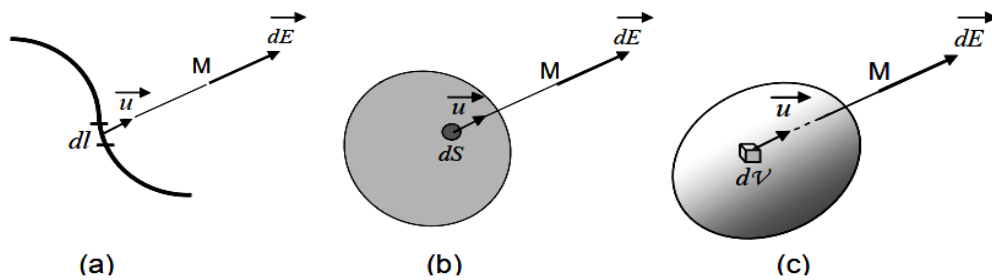
2.10.3.2.Distributions de charges surfaciques

Dans le cas d'une surface chargée avec une densité surfacique σ figure(b) telle que $dQ = \sigma dS$, on trouve de la même façon : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$ en C/cm² (2-15)

2.10.3.3.Distributions de charges Volumiques

De même dans le cas d'un volume V chargé avec une densité volumique ρ figure(c) telle que. $dQ = \rho dV$ on obtient : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$ en C/cm³ (2-16)

dl , dS et dV désignent respectivement les éléments de longueur, de surface et de volume.



Figure(2.14): Champ créé par une distribution continue de charges

Exemple : Calculez le champ électrostatique créé par un fil conducteur de longueur infinie et de densité linéique de charge λ en un point M situé à une distance D du fil. La charge dq située sur la distance dl va créer au point M le champ: $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$
Le champ total est: $\vec{E} = \sum d\vec{E}_x + \sum d\vec{E}_y$

Pour raison de symétrie on' a: $\sum d\vec{E}_x = \vec{0}$

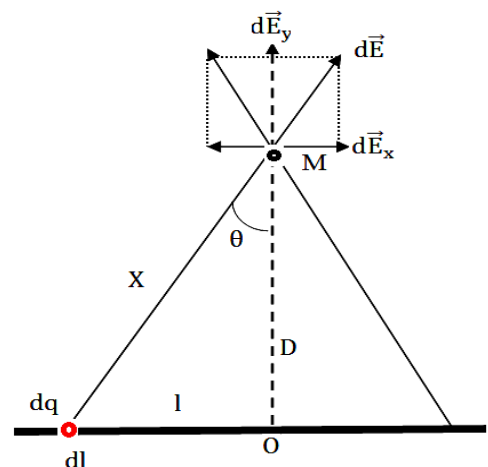
Le champ résultant est donc dirigé suivant (Oy) et vaut:

$$E = \sum dE_y = \int dE_y$$

Comme $dE_y = dE \cos\theta$, on obtient:

$$E = \int \frac{K dQ \cos\theta}{X^2} = \int \frac{K \lambda dl \cos\theta}{X^2}$$

D'autre part: $X = \frac{D}{\cos\theta}$ et $l = D \tan\theta$



Donc : $dl = \frac{D}{\cos \theta^2} d\theta$

Pour décrire tout le fil (de $-\infty$ à $+\infty$) on doit varier θ de $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$

Finalement:

$$E = \int \frac{K \lambda dl}{X^2} \cos \theta = \int \frac{K \lambda}{\left(\frac{D}{\cos \theta^2}\right)} \left(\frac{D d\theta}{\cos \theta^2}\right) \cos \theta = \frac{K \lambda}{D} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{2K\lambda}{D}$$

2.11. Lignes et tubes du champ électrique

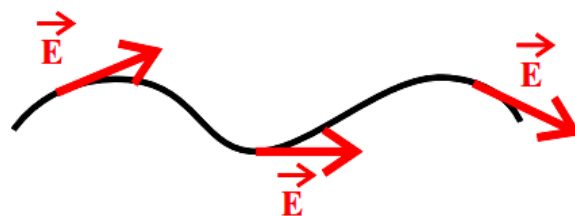
2.11.a. Lignes de champ

• Définition d'une ligne de champ

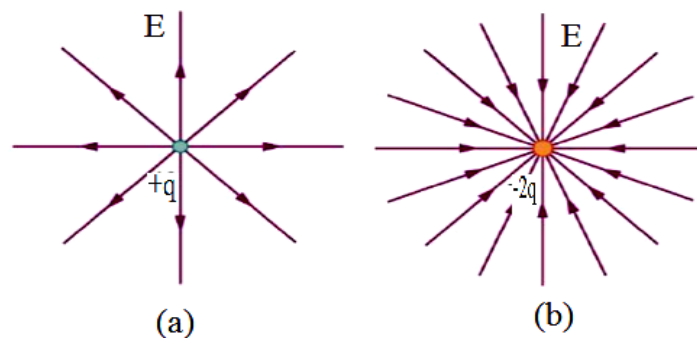
- Ligne tangente en chacun de ses points au vecteur champ.
- Orientée dans le même sens que le champ.

• Propriétés:

- Les lignes de champ sont parallèles si le champ est uniforme.
- Les lignes de champ se resserrent quand le champ augmente et inversement.
- Deux lignes de champ ne peuvent pas se croiser.

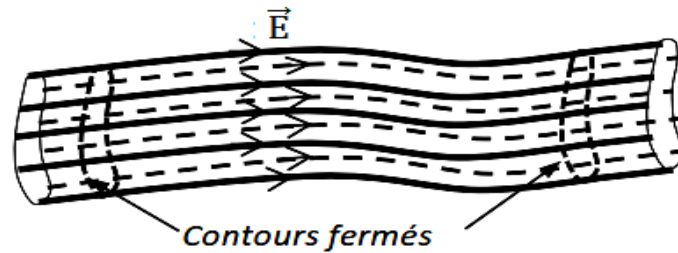


Figure(2.15) : Lignes Champ électrique



Figure(2.16) : Lignes Champ électrique crée : (a) charge positive (+q) et (b) charge négative (-2q)

2.11.b. Un tube de champ (ou tube de force) est défini par la surface formée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.



Figure(2.17) : Tube de champ

Remarque : dans le cas où le champ électrique est uniforme ($\vec{E} = \text{cte}$), les lignes de champ sont des droites parallèles et le tube de champ est un cylindre.

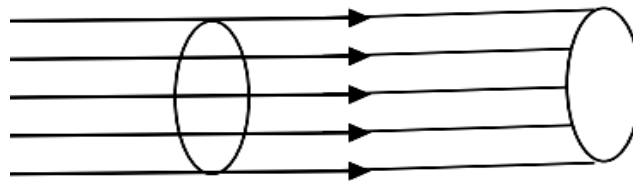


Figure (2.18) : Tube de champ constant

2.12. Potentiel Electrique

Pour faire un calcul rapide du champ électrostatique, on remplace le champ de vecteurs par un champ de scalaires car il est plus facile de travailler avec des scalaires qu'avec des vecteurs. On définit :

- Au point $M(x,y,z)$ on définit un scalaire $V(M)$
- Au point $M'(x',y',z')$ on définit un autre scalaire $(V)M'$

La différence entre ces deux scalaires s'écrit:

$$dV(M) = (V')M - (V)M = \frac{dV}{dl} \cdot dl = \overrightarrow{\text{grad } V} \cdot d\vec{l} \quad (2-17)$$

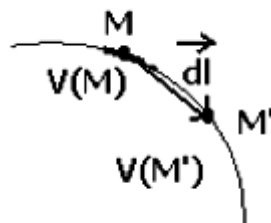


Figure (2. 19) : Potentiel électrostatique

$$dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{l}$$

Cette expression est obtenue par analogie à la loi de gravitation universelle:

- Force gravitationnelle : $\vec{F} = G \frac{m M}{r^2} \vec{u} \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ (Newton 1687) (2-18)

- Force électrique : $F = G \frac{Q Q'}{r^2} \vec{u} = Q' \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ (Poisson 1813) (2-19)

2.12.1.Définition:

Le potentiel électrostatique est relié au champ électrostatique par la relation:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dl} \Rightarrow dV = -Edl \Rightarrow$$
 (2-20)

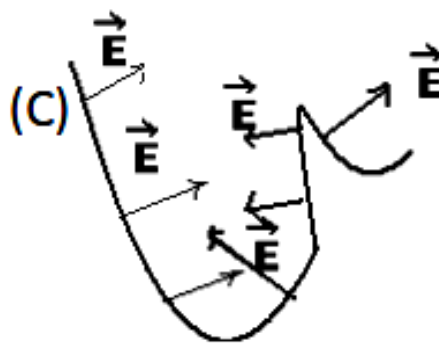
$$dV = -Edl \Rightarrow V = -\int Edl$$
 (2-21)

Le signe " − " est choisi par convention .Lorsque le potentiel V augmente le champ électrostatique diminue.

2.12.2.Surface équipotentielle

On appelle surface équipotentielle, une surface S dont tous les points sont au même potentiel V.

Si sur une courbe (C) on 'a, $dV = 0$, donc le potentiel est constant sur cette courbe. Cette courbe est dite "équipotentielle" et le champ électrique est perpendiculaire à cette courbe $E \perp (C)$.

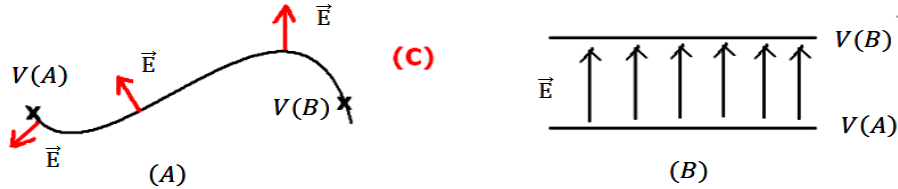


Figure(2.17): Surface équipotentielle

2.12.3. Circulation d'un vecteur

2.12.3.1.Définition:

On appelle la circulation de $\vec{E}$ le long de la courbe (C) entre les points A et B, l'intégrale suivante:



Figure(2.18): Circulation d'un vecteur

$$E = -\frac{dV}{dl}$$

$$\oint = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-22)$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

Les lignes de champ vont des régions à grands potentiels vers des régions à faibles potentiels.

Dans notre cas: $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0 \Rightarrow V(A) > V(B)$.

2.12.4.Potentiel créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle Q située au point M d'une courbe (C) et distante de r .

Soit $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$.

Le champ électrostatique créé par cette charge au point M est :

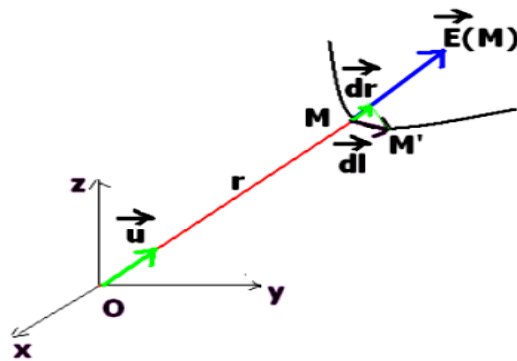
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad (2-23)$$

$$\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{Cte}$$

Le potentiel à l'infini est supposé égal à une constante V_0 .

$$V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + V_0 \quad (2-24)$$



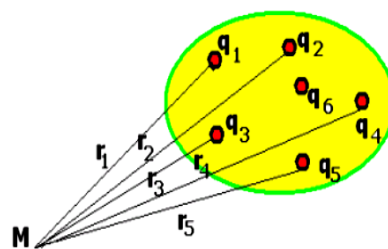
Figure(2.19): Potentiel créé par une charge ponctuelle

Remarques :

- $V_0 = 0$ pour $r = \infty$
- V se mesure en Volts (V)
- Le potentiel mesure le degré de l'électrification de la substance. plus le potentiel est grand et plus le nombre de charges contenues dans cette substance est grand. C'est comme en thermodynamique lorsque la température augmente, la quantité de chaleur augmente.

2.12.5.Potentiel créé par un ensemble de charges Ponctuelles

Soient n charges ponctuelles figure (2.19).



Figure(2.19): Potentiel créé par un ensemble de charges Ponctuelles

Le potentiel créé par ces charges au point M est : $V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M)$

Comme la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ est toujours vérifiée, on aura:

$$V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} + V_0$$

Si la distribution est continue on aura: $V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} + V_0$ (2-25)

• Pour une distribution linéique de charges: $V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r} + V_0$ (2-26)

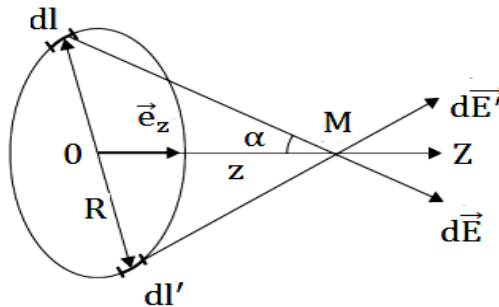
• Pour une distribution surfacique de charges : $V(M) = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} + V_0$ (2-27)

• Pour une distribution volumique de charges : $V(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r} + V_0$ (2-28)

Exemple : soit un fil conducteur circulaire de rayon R uniformément chargé avec une densité de charge $\lambda > 0$.

1. Donner l'expression du champ $\vec{E}(M)$

2. Donner l'expression du champ V(M) . En déduire $\vec{E}(M)$.



Solution

1. A chaque élément dl du fil, on peut faire correspondre un élément dl' symétrique par rapport à O.

par raison de symétrie, la seule composante de $d\vec{E}$ non nulle est celle parallèle à $\vec{e}_z$. $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$.

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{KdQ}{z^2 + R^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$E_z = \frac{K \lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi R} dl = \frac{2\pi R K \lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{R \lambda Z}{2 \epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{R \lambda Z}{2 \epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

2- $dV = \frac{K dQ}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{K \lambda dl}{\sqrt{z^2 + R^2}}$

$$V = \frac{K \lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}} \int_0^{2\pi R} dl == \frac{R \lambda}{2 \varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V, E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} = 0, E_y = -\frac{\delta V}{\delta y} = 0, E_z = -\frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{R \lambda}{2 \varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}} \right) = \frac{R \lambda z}{2 \varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

2.13. Energie électrostatique

2.13.1. Energie potentielle d'une charge ponctuelle en interaction avec un champ extérieur

L'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener de façon quasi-statique cette particule de l'infini à sa position actuelle.

Prenons une particule de charge q placée dans un champ $\vec{E}$. Pour la déplacer de l'infini vers un point M , un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de Coulomb.

Si ce déplacement se fait très lentement, la particule n'acquiert aucune énergie cinétique.

Cela n'est possible que si, à tout instant, $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F} = -q \vec{E}$. (2-29)

Le travail fourni par l'opérateur sera donc :

$$W = \int_{\infty}^M dW = \int_{\infty}^M \vec{F}_{\text{ext}} dr = -q \int_{\infty}^M \vec{E} d\vec{r} = q(V(M) - V(\infty)) \quad (2-30)$$

Puisqu'on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini, et comme $dW = -dE_p$ on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M où le potentiel est $V(M)$: $E_p = q V(M)$ (2-31)

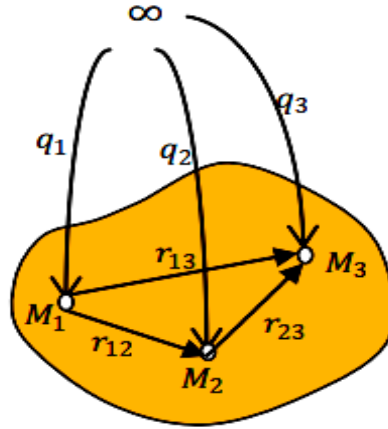
2.13.2. Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles

Pour calculer cette énergie, il convient d'amener une à une les charges q_i et d'évaluer à chaque fois l'énergie nécessaire à cette opération, l'énergie étant la somme de toutes ces contributions.

Considérons un système de trois charges q_1, q_2 et q_3 placées respectivement en M_1, M_2 et M_3 . On amène d'abord q_1 de l'infini en M_1 : le travail $W_1 = 0$.

q_1 étant placée en M_1 . On amène alors une charge q_2 de l'infini jusqu'en M_2 , c'est à dire que l'on fournit un travail: $W_2 = q_2 V_1(M_2) = K \frac{q_2 q_1}{r_{12}}$ (2-32)

Ce travail est identique à celui qu'il aurait fallu fournir pour amener q_1 de l'infini en M_1 en présence de q_2 déjà située en M_2 .



Figure(2.20): Energie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles

Si maintenant on amène une troisième charge q_3 de l'infini jusqu'en M_3 (q_1 , et q_2 fixes), il faut fournir un travail supplémentaire :

$$W_3 = q_3 V_{1+2}(M_3) = q_3 (V_1(M_3) + V_2(M_3)) = \left(\frac{Kq_1 q_3}{r_{13}} + \frac{Kq_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Le travail total : } W &= W_1 + W_2 + W_3 = 0 + K \frac{q_2 q_1}{r_{12}} + \left(\frac{Kq_1 q_3}{r_{13}} + \frac{Kq_2 q_3}{r_{23}} \right) \\ &= K \left(\frac{q_2 q_1}{r_{12}} + \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2-33)$$

L'énergie électrostatique d'un ensemble de n charges ponctuelles est donc :

$$\begin{aligned} E_P &= K \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad , \quad E_P = \frac{1}{2} K \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ E_P &= \frac{1}{2} K \sum_{i=1}^n q_i V_i(M_i) \end{aligned} \quad (2-34)$$

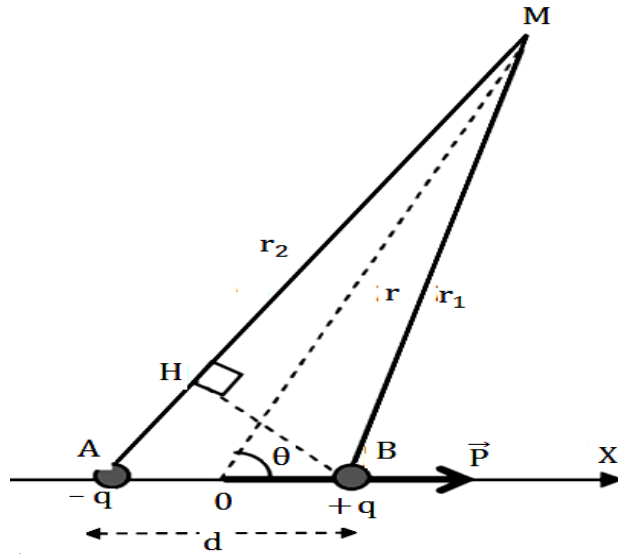
Exemple : donner l'expression de l'énergie d'un ensemble de quatre charges q_1, q_2, q_3 et q_4 placées sur les cornières d'un carré de longueur a .

2.14. Dipôle Electrique

2.14. 1. Moment dipolaire électrique

Le dipôle électrique est constitué de deux charges égales et de signes contraires, $+q$ et $-q$, séparées d'une distance d . Celle-ci est très petite par rapport aux distances d'observation r .

$$d \ll r$$



Figure(2.21) : Dipôle Electrique

Un dipôle est caractérisé par son "moment dipolaire électrique" ou "moment électrique" :

$$\vec{P} = q \cdot \vec{d} \quad (2-35)$$

Remarque : Le moment électrique est orienté de la charge négative vers la charge positive.

2.14.2. Potentiel électrique créé par un dipôle

Calculons le potentiel V produit, par ce dipôle, en un point M situé à une distance r du milieu

$$O \text{ du dipôle: } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (2-36)$$

Par définition $d \ll r$.

Soit H la projection de B sur AM : $AH = d \cos \theta = r_2 - r_1$

θ désigne l'angle formé par r et la direction du dipôle $\vec{p}$. Il est pratiquement égal aux angles

θ_1 formé par $\vec{p}$ et AM et θ_2 formé par $\vec{p}$ et BM .

D'autre part, on peut faire les approximations : $r_2 = r_1 = r$

Par conséquent le potentiel créé en M , par le dipôle, est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (2-37)$$

2.14.3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle

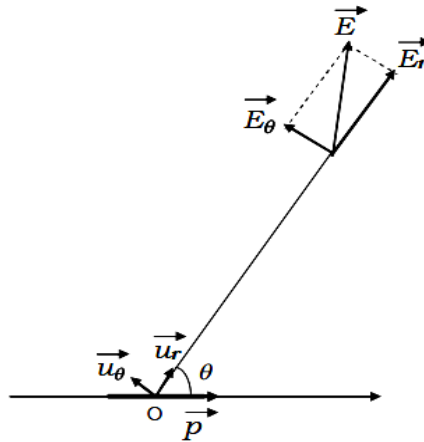
La relation entre le champ et le potentiel est: $dV = \vec{E} d\vec{l}$

soit en coordonnées polaires (figure 2. 22) :

$$dV = -(E_r dr + E_\theta r d\theta) = \left(\frac{\delta V}{\delta r}\right) dr + \left(\frac{\delta V}{\delta \theta}\right) d\theta \quad (2-38)$$

On obtient à partir de (2-37) et (2-38), les composantes du champ électrique en coordonnées polaires :

$$E_r = -\left(\frac{\delta V}{\delta r}\right)_\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = -\left(\frac{1}{r} \frac{\delta V}{\delta r}\right)_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad (2-39)$$



Figure(2.22) : Champ électrique créé par un dipôle

Exemple . Calculer directement le champ créé par un dipôle (voir figure (2.23)).

- 1) en un point M' sur l'axe ox du dipôle.
- 2) en un point M situé sur l'axe oy perpendiculaire au dipôle en son milieu O.

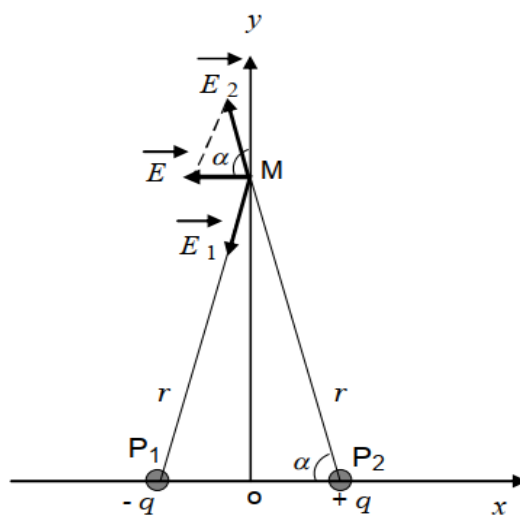


Figure (2.23)

Solution

1) Calcul du champ en M' sur l'axe OX :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{(x-a)^2} - \frac{q}{(x+a)^2} \right] \cdot \vec{i} \quad \text{où } d = 2a$$

Après calculs et en négligeant (a^2) devant (r^2) on trouve : $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$

2) Calcul du champ en M sur OY :

Les deux triangles isocèles MP_1P_2 et E_2EM , de la (figure 2.23), sont semblables.

$$\text{Donc: } \frac{E}{E_2} = \frac{d}{r}, \quad \text{et avec } E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad \text{on a: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Soit, en négligeant (a^2) devant (r^2) on trouve : $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}$

2.14.4. Dipôle placé dans un champ électrique uniforme

Cas Couple.

Si on place un dipôle, de moment électrique $\vec{p}$, dans un champ extérieur $\vec{E}$ uniforme, les charges qui le constituent sont soumises à des forces égales et opposées $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

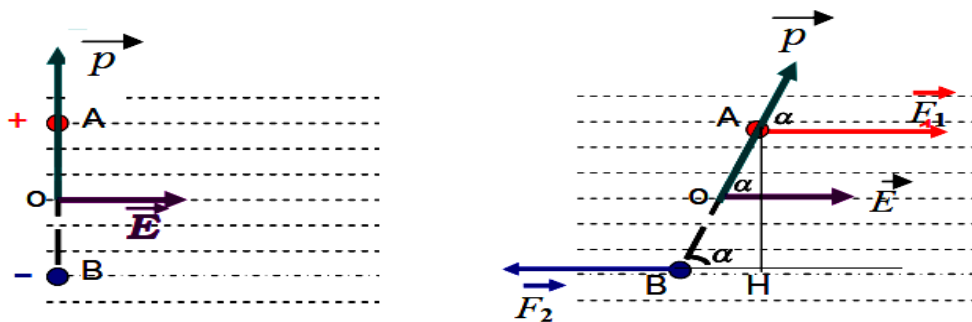


Figure (2.24): Dipôle placé dans un champ électrique uniforme

Le dipôle subit alors l'action d'un couple de module : $\Gamma = |\vec{l}| F \sin \alpha$

or $F = q E$ et $AH = d \sin \alpha$

donc : $\Gamma = q E d \cdot \sin \alpha$ sachant que $p = q d$ on a : $\Gamma = p E \sin \alpha$

Le moment du couple de force qui agit sur le dipôle s'écrit : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ (2-40)

Ce couple fait pivoter le dipôle pour l'aligner parallèlement au champ extérieur (figures 2.24).

2. 15. Energie potentielle.

L'énergie potentielle d'un dipôle, placé dans un champ $\vec{E}$, est calculée en faisant la somme des énergies potentielles de chaque charge :

$$E_p = q (V_A - V_B) \quad (2-41)$$

$$\text{Avec } V_A - V_B = -\vec{E} \cdot \vec{d}$$

l'expression (2-41) devient $E_p = -q \vec{E} \cdot \vec{d}$

sachant que : $\vec{P} = q \cdot \vec{d}$

l'énergie potentielle de ce dipôle, placé dans un champ $\vec{E}$, est alors donnée par:

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E} \quad (2-42)$$

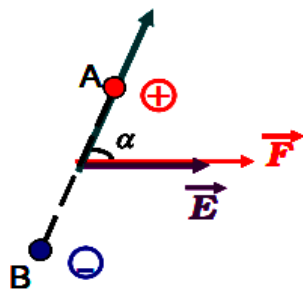
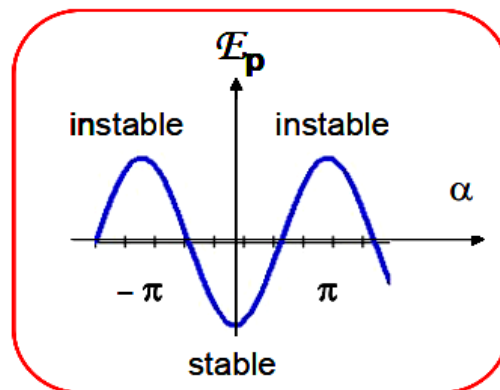


Figure (2.25) : Energie potentielle



Figure(2.26): La stabilité de l'énergie potentielle

Cette énergie est minimale pour : $\alpha = 0$, et maximale pour : $\alpha = -\pi$ et $\alpha = +\pi$
la position $\alpha = 0$ correspond à un équilibre stable et les positions $\alpha = -\pi$ et $\alpha = +\pi$
à un équilibre instable.

2.16. Les Diélectriques

Les matériaux isolants ou diélectriques, qui ont été mis en évidence lors des phénomènes d'électrisation et les milieux magnétiques, seront étudiés en deuxième et troisième année de la licence. Le vide est le seul milieu considéré dans ce module . Néanmoins ,

quelques notions élémentaires seront données au sujet de ces milieux. Il existe deux types de diélectriques :

2.16.1. Les diélectriques apolaires

Ils sont constitués d'atomes ou de molécules apolaires.

Les barycentres des charges positives et négatives sont confondus. Le moment électrique de ces particules est nul, le milieu n'est pas polarisé.

Lorsqu'on applique un champ électrique, les charges subissent un petit déplacement d par rapport à leurs positions d'équilibre. Cela se traduit par l'apparition de dipôles, le diélectrique est alors polarisé. C'est la "polarisation induite"

2.16.2. Les diélectriques polaires : Ils sont constitués de molécules polaires (HCl , H_2O , ...) qui forment des dipôles. Mais, en raison de l'agitation thermique, ces dipôles sont orientés au hasard, leur moment résultant est nul : le milieu n'est pas polarisé.

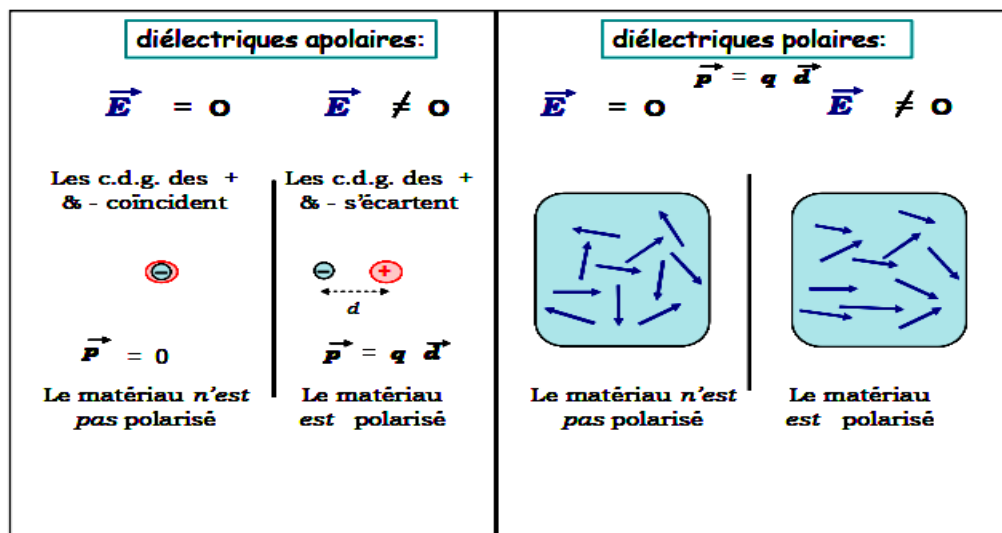


Figure (2.27): Les deux types diélectriques

2.17. Flux Electrostatique et théorème de Gauss

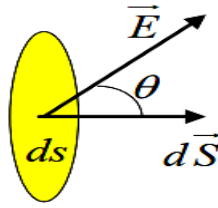
2.17.1. Le flux électrique

2.17.1.1.Définition : On appelle flux du champ électrique à travers une surface la grandeur :

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2-43)$$

$d\vec{S}$: Vecteur de la surface élémentaire, il est toujours normale à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume limité par la surface.

Si θ est l'angle compris entre $\vec{E}$ et $d\vec{S}$, on aura : $\phi = \int E ds \cos\theta$ (2-44)



Figure(2.28) : Le flux a travers une surface élémentaire

L'unité du flux électrique est le **Weber** (Wb), son équation aux dimensions est :

$$[\phi] = L^3 T^{-3} A^{-1}$$

2.17.2. Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss exprime la relation entre le flux électrique à travers une surface fermée et le nombre de charges présentes à l'intérieur du volume entouré par cette surface.

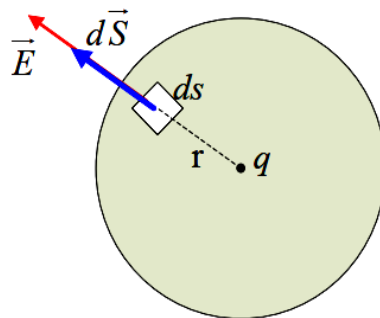
➤ **Exemple :** soit (q) une charge ponctuelle positive, elle produit un champ électrique radial dirigé vers l'extérieur, de module $E(r) = K \frac{q^2}{r^2}$

On choisi comme surface fermée une sphère dont le centre est la charge (q) .Figure (2.29)
Puisque nous sommes dans le cas d'une sphère, tous les vecteurs surface élémentaire $d\vec{S}$ sont radiaux, ils ont donc la même direction que $\vec{E}$, d'où $(\vec{E}, d\vec{S}) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$

Le flux électrique élémentaire à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$ est :

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S} = E dS \quad (2-45)$$

Par intégration on obtient:
$$\phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S K \frac{q}{r^2} dS \quad (2-46)$$



Figure(2.29) : Charge ponctuelle dans une sphère

Puisque le rayon de la sphère est constant on'a : $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S K \frac{q}{r^2} dS$ (2-46)

Rappelons-nous que la surface d'une sphère est : $\oint_S dS = S = 4\pi r^2$ (2-47)

Après remplacement on obtient : $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ (2-48)

➤ **Résultat** : Le flux du champ magnétique sortant de la sphère ($\forall r$) au centre de laquelle se trouve une charge ponctuelle positive ($q > 0$) est égal à $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Dans le cas où ($q < 0$) le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé vers le centre de la sphère et le flux électrique Φ est négatif car $(\vec{E}, d\vec{S}) = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1$

➤ Généralisation

Le résultat obtenu par le calcul pour une seule charge est vérifié dans le cas général. Si on considère une surface fermée quelconque renfermant n charges $q_1 + q_2 + \dots + q_n$, (quelque soient leur signes), on démontre dans ce cas que le théorème de Gauss :

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (2-49)$$

Le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée est égal à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur du volume limité par cette surface, divisé par la permittivité du vide ϵ_0 . et l'intérêt de ce théorème il facilite et simplifie le calcul du champ électrique produit par une distribution simple de charges.

2.17.4. Application du Théorème de Gauss

2.17.4 a. Champ crée par une charge ponctuelle

On considère la charge q comme centre d'une sphère de rayon .

Donc le champ électrique $\vec{E}$ est radial et sortant, $\cos 0 = 1$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La surface de la sphère est $S = 4\pi r^2$

D'où : $E = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (2-50)

2.17.4b. Potentiel crée par une charge ponctuelle

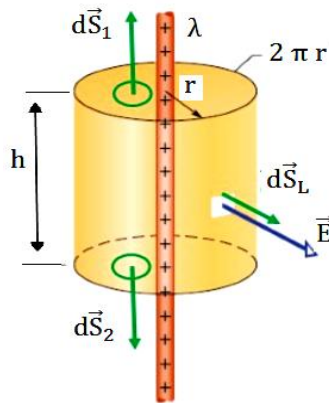
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr \Rightarrow V = -\int_0^r E dr = -\int_0^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte} \quad (2-51)$$

2.17.4c. Champ électrique produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée :

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'un cylindre de longueur l , et dont l'axe coïncide avec la tige.

Dans ce cas, la surface de Gauss est constituée de trois parties. Deux bases qui sont deux disques parallèles (S_1 et S_2) et une surface latérale courbe (S_L).



Figure(2.30) :Tige chargé

Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à travers chaque surface, soit: $\Phi = \sum \Phi_i = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Sur les surfaces des bases (S_1) et (S_2) le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au vecteur $d\vec{S}$, donc il n'y a aucun flux qui traverse ces deux surfaces ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$). Mais, par contre sur la surface latérale (S_L), les vecteurs $d\vec{S}$ sont tous radiaux comme $\vec{E}$, ($\cos 0 = 1$).

Avec Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 sont le flux à travers les trois surfaces S_1 , S_2 et S_L respectivement.

$$\Rightarrow \Phi_1 = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_3 = \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_3} E \cdot dS$$

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_1, \vec{E} \perp d\vec{S}_2, \vec{E} \parallel d\vec{S}_L$$

$$\Phi = \oint E \cdot d\vec{S}_1 \cos \frac{\pi}{2} + \oint E \cdot d\vec{S}_2 \cos \frac{\pi}{2} + \oint E \cdot d\vec{S}_L \cos 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos 0 = 1$$

$$\Phi = \oint E \cdot d\vec{S}_L = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

D'où l'on obtient :

$$\text{Sachant que } Q_i = \lambda h \quad \text{et} \quad S_L = 2\pi r h,$$

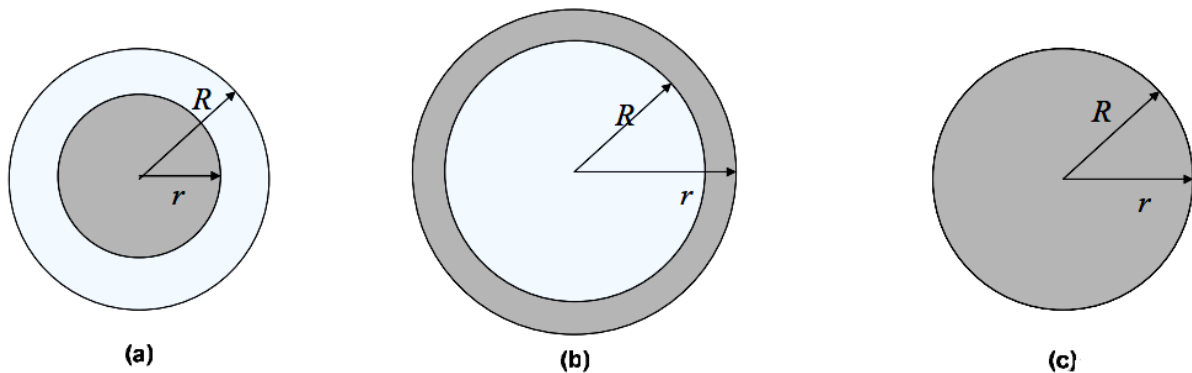
$$\text{donc : } E \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad (2-52)$$

2.17.4d. Potentiel produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr \Rightarrow V = -\int_0^r E dr = -\int_0^r \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} dr$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \ln r + \text{cte} \quad (2.53)$$

2.17.4e. Champ électrique produit par une sphère pleine chargée uniformément



Figure(2.31) : Sphère pleine chargées

La surface de Gauss qui convient ici est une sphère de rayon r . En appliquant le théorème de Gauss on écrit :

Discussion

• $R > r$: (la figure 2.31-a), seule une partie de la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss.

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \cdot dS \cos 0 = E \oiint dS = E \cdot S = \sum \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$S = 4\pi r^2$$

$$Q_{\text{int}} = \rho V, V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4\pi r^3}{3}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad (2-54)$$

Le champ E est proportionnel à la distance r

*Le Potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr \Rightarrow V = -\int_0^r E dr = -\int_0^r \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr$$

$$V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + \text{cte} \quad (2-55)$$

• $R < r$: (la figure 2.31-b), toute la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss

$$S = 4\pi r^2, Q_{\text{int}} = \rho V, V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4\pi R^3}{3}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \quad (2-56)$$

Le champ E est inversement proportionnel au carré de la distance r^2 . La sphère se comporte comme une charge ponctuelle.

* Le Potentiel

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E dr \Rightarrow V &= -\int_0^r E dr = -\int_0^r \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} dr \\ &= -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_0^r \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

$$V = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r} + \text{cte} \quad (2-57)$$

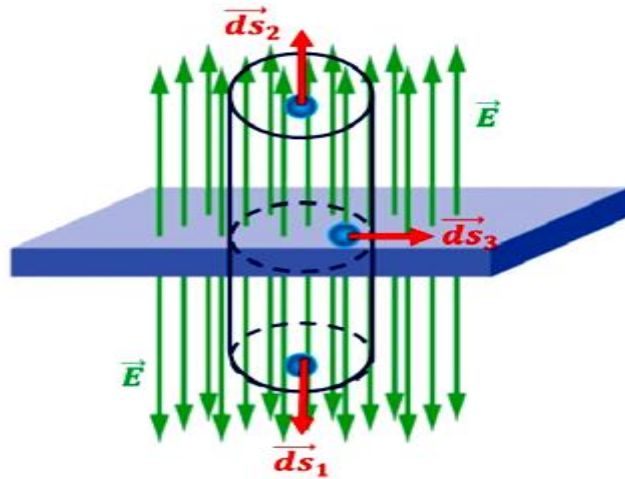
• $R = r$: (Figure 2.31 -c) la surface de Gauss coïncide avec la surface de la sphère :

$$S = 4\pi R^2, \quad Q_{\text{int}} = \rho V, \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$= E \cdot 4\pi R^2 = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4\pi R^3}{3}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{R^2} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R \quad (2-58)$$

Le champ électrique sur la surface de la sphère est constant.

2.17.4f. Champ électrique produit par un plan infini chargé uniformément



Figure(2.32): Plan infini chargé

On choisit comme surface de Gauss un cylindre perpendiculaire au plan. Là aussi on a trois surfaces :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

$$\Phi = \oiint E \cdot dS_1 \cos 0 + \oiint E \cdot dS_2 \cos 0 + \oiint E \cdot dS_3 \cos \frac{\pi}{2}$$

- Le flux à travers la base de surface S_1 : $\Phi_1 = E \cdot S_1, \cos 0 = 1$

- Le flux à travers la base de surface S_2 : $\Phi_2 = E \cdot S_2, \cos 0 = 1$

- Le flux à travers la base latérale S_3 est nul ($\Phi_3 = 0$) , ($d\vec{S}_3 \perp \vec{E}$) , ($\theta = \frac{\pi}{2}$) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$S = 2\pi r h, \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi r h}{\epsilon_0}$$

-Faire attention à $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$, $S_1 = S_2 = S$

$$\text{Donc } \Phi = 2 E S = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi r h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2-59)$$

*** Le Potentiel** $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow dV = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz$

$$\vec{E} = -E dz \Rightarrow V = -\int_0^z E dz = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + \text{cte} \quad (2-60)$$

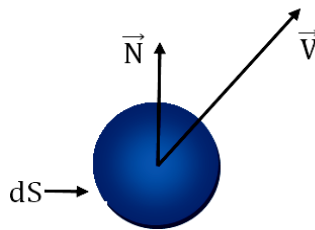
2. 18. Flux d'un Vecteur

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$, et une surface élémentaire $d\vec{S}$.

2.18.1. Flux élémentaire

est donné par la relation suivante: $d\phi = \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{N} \cdot dS$ (2-61)

où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal à la surface dS , qu'il convient de bien orienter, en tenant compte des conventions qui vont être précisées.



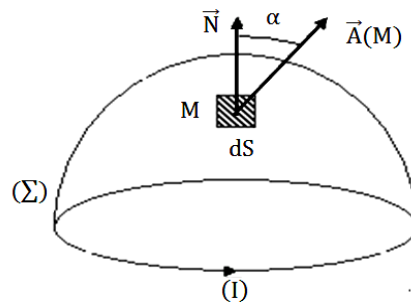
Figure(2.33) : Flux élémentaire

2.18.2. Flux à travers une surface ouverte

Soit (C) le contour sur lequel s'appuie la surface (S).

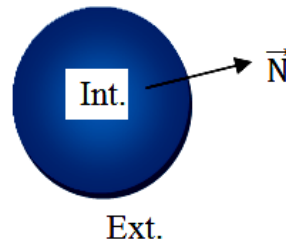
Une fois (C) orienté, le sens du vecteur unitaire $\vec{N}$ est défini par la règle du tirebouchon (sens dans lequel avance le tirebouchon quand on le tourne dans le sens positif choisi sur (C)).

On a alors : $\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{N} \cdot dS$ (2 - 62)



Figure(2.34) : Flux à travers une surface ouverte

* Si la surface est fermée, on ne peut pas définir le contour (C). Par convention N est orienté de l'intérieur vers l'extérieur.



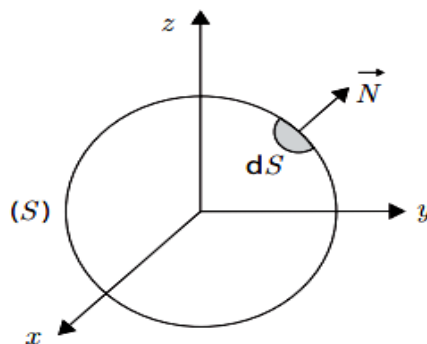
Figure(2.35) : Angle solide élémentaire

Exemple. Champ à symétrie sphérique

Calculer le flux du vecteur $V(M) = f(r) \vec{e}_r$ à travers une sphère de centre O et de rayon r (voir figure (2.36))

$$\text{On 'a tout simplement : } \Phi = \iint d\Phi = V \cdot N = \iint f(r) ds = 4\pi r^2 f(r) \quad (2-63)$$

car f (r) est constant quand on se déplace sur la sphère

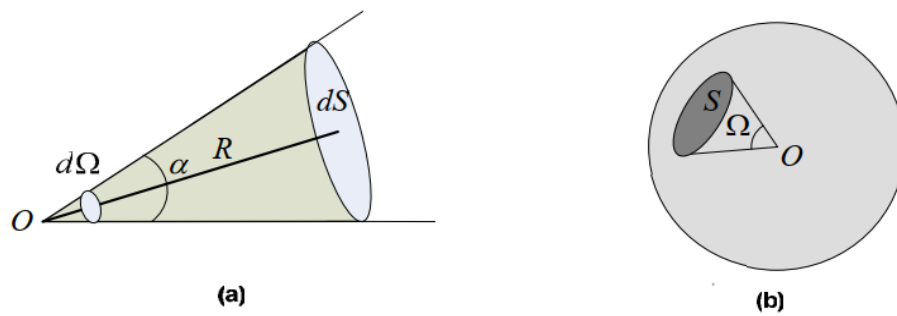


Figure(2.36) : Champ à symétrie sphérique

2.19. Angle Solide

2.19. 1.Angle solide élémentaire

En géométrie plane, on s'intéresse dans les figures à l'angle plan. Quand il s'agit de géométrie spatiale on parle d'angle solide. Par exemple, dans l'obscurité les rayon lumineux issus d'une source lumineuse ponctuelle sont caractérisés par deux grandeurs : la direction (qui est une droite), et l'angle maximal de propagation du faisceau lumineux autour de cette droite (un cône). Dans ce dernier cas, l'espace occupé par le faisceau lumineux s'appelle angle solide, figure (2.37)



Figure(2.37) : Angle Solide

2.19.2.Définition : L'angle solide élémentaire est l'espace contenu dans une surface conique élémentaire dS située à la distance R du sommet du cône, on le calcule par la formule :

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \quad (2-64)$$

L'angle solide est toujours positif et indépendant de R . Son unité est le stéradian (sr). Pour déterminer la valeur de l'angle solide Ω , on dessine un cône de centre O et de rayon R . La surface que coupe le cône est S (figure 2.36-b). La valeur de l'angle solide est donc :

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (2-65)$$

En coordonnées sphériques, et en considérant R constante, la surface élémentaire est égale:

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2-66)$$

Donc, l'angle solide élémentaire s'écrit :

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (2-67)$$

En intégrant on obtient l'angle solide entourant un cône d'angle au sommet α :

$$\Omega = d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = 2\pi(1 - \cos \alpha) \quad (2-68)$$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) \quad (2-69)$$

Premier cas : $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega = 2\pi$ [sr], correspond à la moitié de l'espace constitué par l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

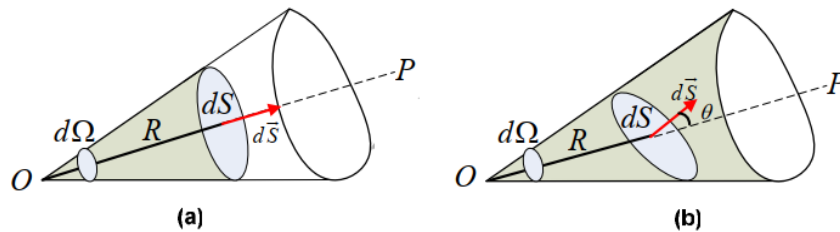
Deuxième cas : $\alpha = \pi \Rightarrow \Omega = 4\pi$ [sr], correspond à tout l'espace autour d'un point. C'est la valeur extrême pour un angle solide.

Cas général :

* Si le vecteur surface élémentaire est parallèle à la droite OP (figure 2.38-a), $\cos \theta = 1$, et par conséquent l'angle solide est égal à : $d\Omega = \frac{dS}{R^2}$ (2-70)

* Si le vecteur surface élémentaire fait l'angle θ avec la droite OP (figure 2.38-b), l'angle solide élémentaire est égal à : $d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{R^2}$ (2-71)

C'est cette dernière expression qu'il faut retenir pour le calcul de l'angle solide dans le cas général.



Figure(2.38) : Angle Solide

Exemple

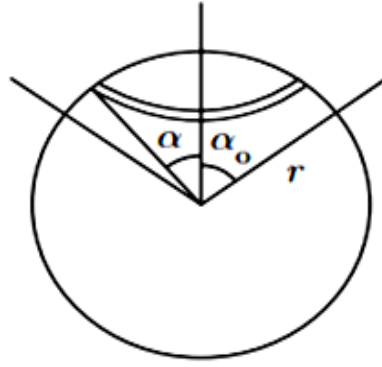
- Espace entier : $\Omega = \frac{1}{r^2} \oint dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ stérad (2-72)

-Demi-espace entier : $\Omega = 2\pi$ stérad. (2-73)

2.19.3.Cône de demi-angle au sommet α_0

$$dS = 2\pi r \sin \alpha d\alpha = 2\pi r^2 \sin \alpha d\alpha \quad (2-74)$$

$$\Omega = \iint \frac{dS}{r^2} = \int_0^{\alpha_0} 2\pi \sin \alpha d\alpha = 2\pi (1 - \cos \alpha_0) \quad (2-75)$$



Figure(2.39) : Cône de demi-angle

2.19.4. La relation entre l'angle solide et le flux électrique

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q à une distance de la charge est:

$$E = K \frac{q}{r^2}.$$

Le flux élémentaire $d\Phi$ à travers une surface élémentaire dS située à la distance de la charge q

$$\text{est : } d\Phi = E \cdot dS = K \frac{q}{r^2} dS \quad (2-76)$$

$$d\Phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} d\Omega \quad (2-77)$$

Par intégration on obtient le flux total à travers toute la surface S :

$$\Phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \Omega \quad (2-78)$$

* Conclusion:

1- Le flux électrique produit par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque est égal au produit de $\frac{q}{4 \pi \epsilon_0}$ par l'angle solide Ω sous lequel on voit la surface à partir de la charge.

2- Si la surface entourant la charge q est fermée, l'angle solide est 4π , et le flux est égal $\frac{q}{\epsilon_0}$.

3- Si la surface entourant la charge q est fermée mais qu'elle n'entoure pas la charge, l'angle solide est nul, et le flux lui-même est nul.

2.20. Conducteurs en Equilibre

2.20.1. Définition

Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel les charges libres peuvent se déplacer . un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes les charges sont immobiles , c'est - ta-dire que les charges intérieures ne sont soumises à aucune force.

2.20.2. Propriétés des conducteurs en équilibre

2.20.2a. Champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

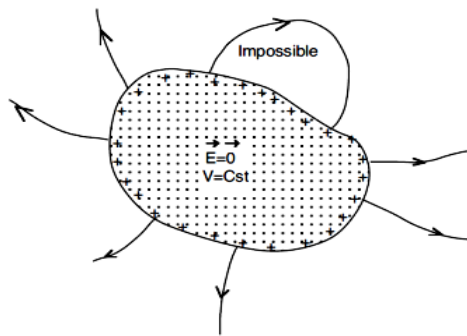


Figure (2.40): Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

➤ Puisque les charges à l'intérieur du conducteur en équilibre sont au repos, elles ne sont donc soumises à aucune force, cela veut dire que le champ électrostatique dans le conducteur en équilibre est nul $\vec{F} = q \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

➤ Le vecteur champ électrostatique est perpendiculaire à la surface du conducteur en équilibre : ceci s'explique par le fait que les lignes de champ sont, d'une part, tangentes au vecteur champ, et d'autre part perpendiculaires au plan.

2.20.2b. Conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel

En effet, la différence de potentiel (ddp) entre deux points quelconques M et M' est définie par $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'}$, or $\vec{E} = \vec{0}$ pour un conducteur en équilibre $\Rightarrow V = \text{cte}$. Comme le potentiel est le même en tous les points du conducteur, la surface externe est une surface équipotentielle. On retrouve bien que le champ est normal à cette surface.

2.20.2c. La charge est nulle en toute région interne au conducteur

Le champ E est nul en tout point M intérieur au conducteur, le flux $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ est donc nul à travers toute surface fermée intérieure au conducteur et entourant M.

D'après le théorème de Gauss, la charge intérieure à cette surface est nulle. Les charges se répartissent donc uniquement sur la surface du conducteur (en réalité une surface occupant une épaisseur de quelques couches d'atomes).

Remarque

Les mêmes résultats sont encore valables pour un conducteur creux. Le champ est nul dans le conducteur et la cavité qui constitue un même volume équipotentiel. Les charges sont localisées à la surface externe du conducteur.

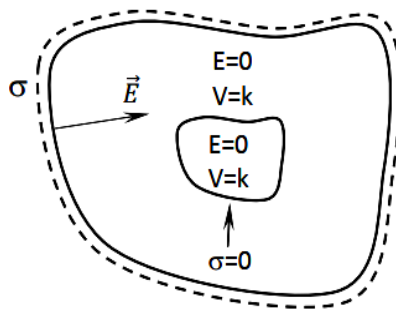


Figure (2.41): Localisation des charges à la surface d'un conducteur

2.20.2d. Relation entre le champ au voisinage immédiat d'un conducteur et la charge électrique superficielle.

Le flux électrique se compose de 3 termes :

- 1- - Flux à travers la surface latérale (nul) $\vec{E} \perp d\vec{S}$
- 2- Flux à travers la base intérieure (nul) $\vec{E} = \vec{0}$

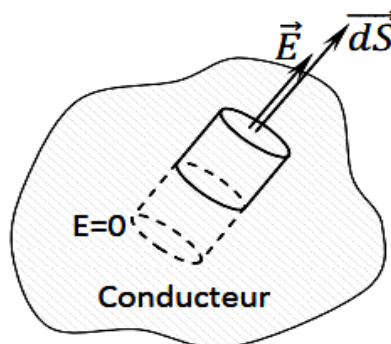


Figure (2.42): la Relation entre le champ d'un conducteur et la charge électrique superficielle.

- 3- Seule subsiste le flux à travers la base extérieure : $d\Phi = E \cdot dS$. (2-79)

Par ailleurs, si σ est la densité superficielle de charge, la charge contenue dans le cylindre est :

$$dq = \sigma dS \quad (2-80)$$

$$\text{En appliquant le théorème de Gauss : } E \cdot dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2-81)$$

Cette expression donne la valeur du champ électrique en un point proche de la surface et à l'extérieur du conducteur, alors que le champ à l'intérieur est nul. Sur la surface le champ prend une valeur moyenne E_{moy} .

Le résultat de ce qui vient d'être dit est qu'à la traversée de la surface du conducteur, le champ électrique varie comme indiqué sur la figure (2.43)

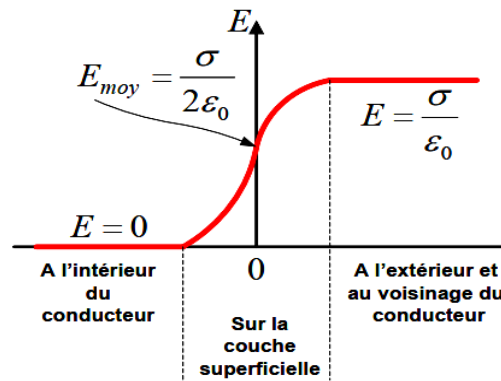


Figure (2.43): Variation du champ électrique à la traversée de la surface du conducteur

On peut résumer les propriétés du conducteur en équilibre par la figure (2.44)

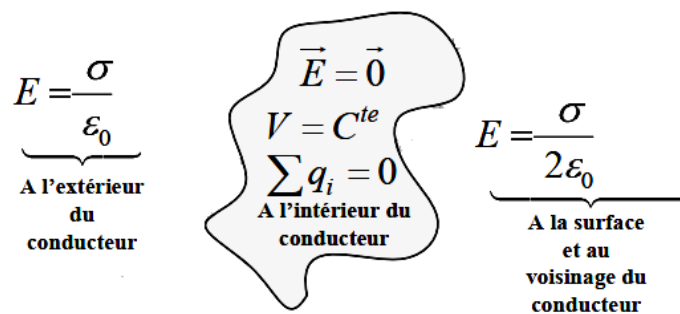


Figure (2.44): Propriétés d'un conducteur en équilibre

2.16.2e. Pression électrostatique

Les charges à la surface d'un conducteur sont soumises à des forces répulsives de la part des autres charges. La force exercée par unité de surface, ou pression électrostatique, peut se calculer en multipliant le champ électrique moyen sur la surface du conducteur par la charge par unité de surface.

Le champ électrique moyen est d'après ce qui précède : $E_{\text{moy}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (2-82)

La pression électrostatique vaut : $P = \sigma \cdot E_{\text{moy}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ (2-83)

Raisonnement : L'expression de la force élémentaire $d\vec{f}$ appliquée sur la surface élémentaire extérieure $d\vec{S}_{\text{ext}}$ d'un conducteur qui porte sur sa surface une charge élémentaire $dq = \sigma d\vec{S}_{\text{ext}}$ est : $d\vec{f} = dq \vec{E}_{\text{moy}} = \sigma d\vec{S}_{\text{ext}} \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

D'où : $d\vec{f} = dq \vec{E}_{\text{moy}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} d\vec{S}_{\text{ext}} \Rightarrow \frac{d\vec{S}_{\text{ext}}}{2\varepsilon_0}$

Au vu de l'expression de la pression électrostatique, on en déduit que c'est une grandeur scalaire, et qu'elle est toujours positive. Cette pression peut être considérée aussi comme étant la force capable d'arracher les charges au conducteur.

L'unité de la pression électrostatique : Le pascal (Pa).

2.21. Capacité propre d'un condensateur seul dans l'espace

2.21.1.Définition : la capacité électrique d'un conducteur isolé est le rapport entre sa charge

et son potentiel : $C = \frac{Q}{V}$ (2-84)

Par exemple : La capacité d'un conducteur sphérique placé dans le vide, dont le potentiel est : $V = K \frac{Q}{R}$, est égale à : $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$

Si l'isolant entourant le conducteur sphérique est autre que le vide, alors là, sa capacité est : $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, où ε est la permittivité de l'isolant.

L'unité de la capacité : c'est le coulomb / volt ($C.V^{-1}$), et qu'on appelle le farad (F) en mémoire à Michael Faraday (1791-1867).

Le farad est une unité très grande, on utilise des sous multiples :

➤ le microfarad : 10^{-6} F (μF)

➤ le nanofarad : 10^{-9} F (nF)

➤ le picofarad : 10^{-12} F (pF)

2.21.2. Energie interne d'un conducteur chargé seul dans l'espace

Soit C la capacité propre du condensateur, Q sa charge et V son potentiel dans un état d'équilibre donné.

- L'énergie interne est mesurée par le travail qu'il faut fournir pour charger le conducteur
- Ou bien par le travail des forces électrostatiques mis en jeu au cours de la décharge du conducteur
- Ou encore, elle représente la somme des variations d'énergie potentielle subies par toutes les charges au cours de la charge du conducteur.

Partant de l'énergie potentielle élémentaire donnée

$$dE_p = V dq \Rightarrow E_p = \int_0^Q V dq, q = C V \Rightarrow V = \frac{q}{C},$$

$$\text{Donc : } E_p = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2-85)$$

Il s'ensuit donc que :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V \quad (\text{ Cette énergie est positive } > 0) \quad (2-86)$$

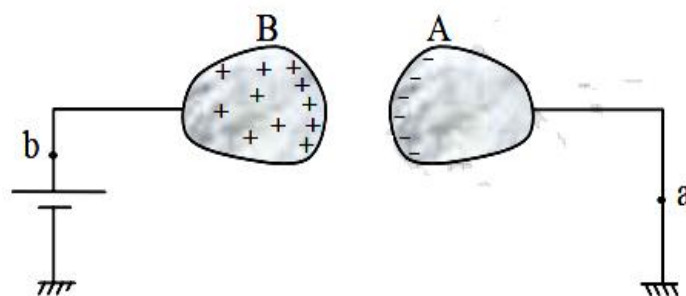
2.22. Condensateurs

Un condensateur B de capacité C est maintenu à un potentiel constant V ($V > 0$ par exemple).

Il porte, donc, une charge Q , telle que: $Q = C V$. (2-87)

Approchons de B un conducteur A maintenu à un potentiel constant ($V = \text{Cte}$ par exemple).

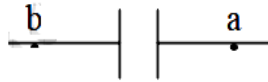
B influence A sur le quel apparaissent des charges négatives. Ces charges négatives influencent à leurs tour le conducteur B sur lequel de nouvelles charges positives apparaissent.



Figure(2.45) : Influences entre deux condensateurs

Il n'y a pas eu, proprement parlé, créations de charges sur B, c'est le générateur qui en a assuré le transport.

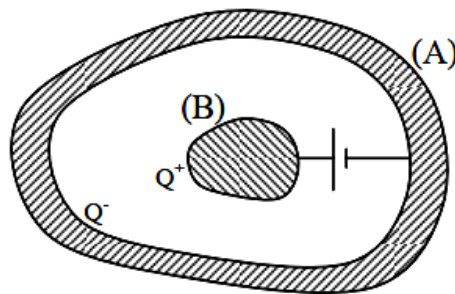
Ainsi , à l'équilibre, du fait de la présence de A, le conducteur B porte plus de charge que lorsqu'il était seul. Il y a eu condensation de l'électricité sur B et sa capacité a augmenté. On obtient donc un condensateur (formé des condensateurs A et B), représenté schématiquement par :



Figure(2.46) : Symbole du condensateur

En pratique, on réalise un condensateur en utilisant deux conducteurs en influence totale. Les charges Q_a et Q_b sont égales et de signe contraire.

$$|Q_a| = |Q_b| = Q \text{ charge du condensateur}$$



Figure(2.47): Réalisation d'un condensateur avec deux conducteurs en influence totale

- Si V est la différence de potentiel entre A et B, on peut montrer que $Q = C V$

$$\frac{Q}{C} = \text{cte} = C \text{ (Capacité du condensateur)}$$

2.22. 1. Calcul de la capacité d'un condensateur

Méthode

- Calculer le champ en tout point intérieur au condensateur
- Dédire, par circulation du champ, la différence de potentiel entre les condensateurs
- Effectuer le rapport $C = \frac{Q}{V}$

2.22.2.Capacités de quelques types de condensateurs

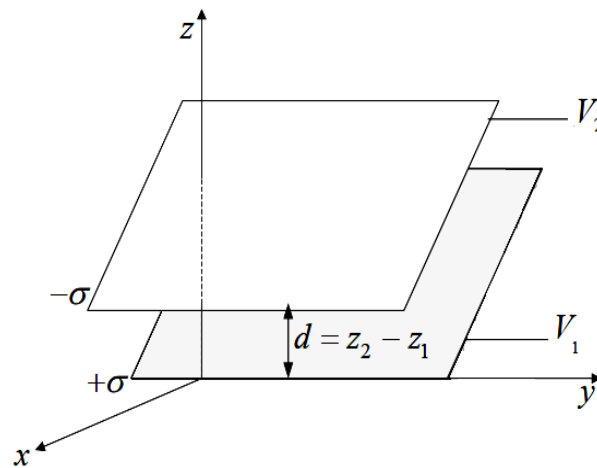
Pour trouver la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et la tension V ($V = V_1 - V_2$), appliquée entre les deux armatures. Pour calculer V on utilise l'expression de la circulation du champ électrique.

$$V = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \frac{Q}{C} \quad (2-88)$$

2.22.3.Exemples

2.22.3a. Condensateur plan

Le condensateur plan est constitué de deux plans conducteurs séparés par un isolant. Figure (2.48).



Figure(2.48): Condensateur Plan

Dans ce cas, on utilise les coordonnées cartésiennes. Le champ électrostatique entre les armatures est la composition des champs résultants des deux plans infinis, soit :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{K} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{K}) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{K} \quad (2-89)$$

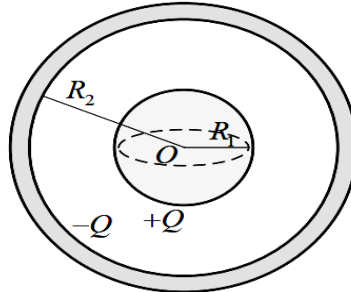
$$V = V_1 - V_2 = \int_{z_1}^{z_2} E dZ = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_2 - z_1) \Rightarrow V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

$$\sigma: \text{Densité surfacique} \quad \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma \cdot S$$

$$\text{La capacité du condensateur plan est donc : } C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (2-90)$$

2.22.3b. Condensateur sphérique

Le condensateur sphérique est constitué de deux sphères concentriques et conductrices, séparées par un isolant. Figure(2.47)



Figure(2.49): Condensateur sphérique

On fait appel aux coordonnées sphériques qui conviennent le mieux à ce cas. On part de la relation connue du vecteur champ électrique produit par une sphère :

$$\vec{E}_{(r)} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

On calcule la circulation du champ pour obtenir la différence de potentiel entre les deux armatures :

$$V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = KQ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

A la fin on arrive à l'expression de la capacité du condensateur sphérique :

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (2-91)$$

2.22.3c. Condensateur cylindrique

Le condensateur cylindrique est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux, séparés par un isolant. Figure (2.50).

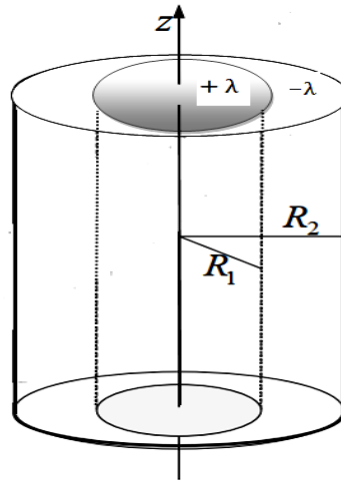


Figure (2.50): Condensateur cylindrique

Pour ce cas, on adopte les coordonnées cylindriques et on suit le même raisonnement que précédemment : D'après le théorème de Gauss, $\vec{E}$ entre les armature est :

$$\vec{E}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \vec{u}_\rho \quad , \lambda : \text{le densité linéique (ou linéaire)}$$

La différence de potentiel est donc :

$$V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{\rho} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Sachant que $Q = \lambda h$, h étant la hauteur des cylindres, la capacité du condensateur cylindrique étudié est : $C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda h}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ (2-92)

Remarque

Deux conducteurs en influence (condensateur) ont une capacité plus grande qu'un conducteur de surface équivalente. L'exemple suivant prouve cette affirmation :

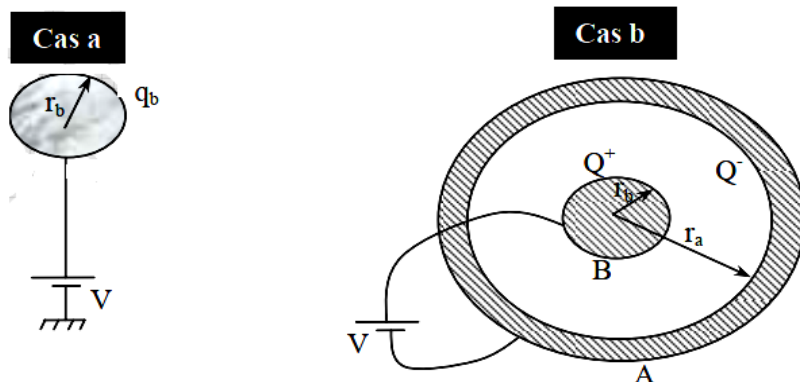


Figure (2.51):Influence de plusieurs conducteurs par la charge

Cas (a)

Une sphère de rayon r_b , portée à un potentiel V par rapport au sol, porte une charge :

$$q_b = 4\pi\epsilon_0 r_b V_b$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{q_b}{V_b} = 4\pi\epsilon_0 r_b$$

Cas (b)

Condensateur sphérique:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = K \frac{Q}{r^2}, \quad r_b < r < r_a$$

V , pris identique au cas (a), est donné par : $V_A - V_B = V = KQ \frac{r_a - r_b}{r_a r_b}$

$$Q = \frac{r_a r_b V}{r_a - r_b} \quad \text{or}$$

$$V = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_b} = K \frac{q_b}{r_b} \Rightarrow Q = \frac{r_a}{r_a - r_b} q_b > q_b$$

Ainsi, avec un même générateur de tension, la charge Q emmagasinée sur le condensateur est supérieure à celle de la sphère B seule et ceci d'autant plus que les conducteurs A et B sont plus rapprochés.

2.23. Groupement de condensateurs

2.23.1. Groupement en série

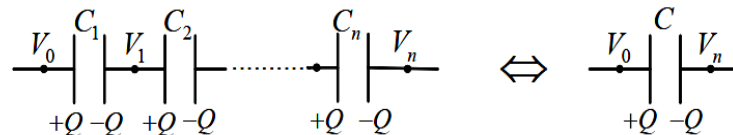


Figure (2.52): Association des condensateurs en séries

Tous les condensateurs emmagasinent la même charge Q à cause du phénomène d'influence. La tension entre les extrémités de tout l'ensemble est égale à la somme des tensions

$$V = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{n-1} - V_n)$$

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

Résultats : L'inverse de la capacité équivalente est égal à la somme des inverses des capacités des condensateurs montés en série : $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ (2-93)

2.23.2. Groupement en parallèles

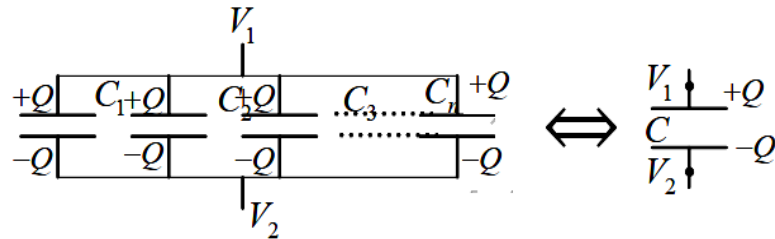


Figure (2.53): Association des condensateurs en parallèles

Tous les condensateurs sont soumis à la même tension V . L'expérience prouve que la charge Q_i de chaque condensateur est proportionnelle à sa capacité C_i . La charge totale est égale à la somme des charges :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$Q = C_1 V + C_2 V + C_3 V + \dots + C_n V$$

$$Q = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) V$$

$$C V = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) V$$

Résultats : La capacité équivalente est égale à la somme des capacités des condensateurs montés en parallèle : $C = \sum_{i=1}^n C_i$ (2-94)

2.24. Energie d'un condensateur chargé

L'étude théorique a démontré, comme le prouvent les expériences que l'énergie emmagasinée par un condensateur chargé est proportionnelle au carré de la tension appliquée entre ses armatures. Son expression est : $w = \frac{1}{2} C V^2$ (2-95)

Sachant que $Q = C V$, on peut aussi écrire : $w = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ (2-96)

2.24.1. Energie du champ électrique

La charge d'un conducteur électrique nécessite la dépense d'une énergie, la raison en est que pour ajouter une charge à un conducteur on doit fournir un travail pour vaincre la force de répulsion qui résulte des charges déjà présentes sur le conducteur. Ce travail entraîne une augmentation de l'énergie du conducteur.

Soit un conducteur au potentiel $V = \frac{q}{C}$, de capacité C et qui porte la charge q .

Si on ajoute à ce conducteur une charge élémentaire dq , en l'amenant de l'infini, le travail fourni serait : $dW = Vdq = \frac{q}{C} dq$

L'augmentation totale de l'énergie du conducteur, quand la charge passe de zéro à la valeur Q , est égal à : $W_E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$

*Dans le cas d'un conducteur sphérique, par exemple, où $C = 4\pi\epsilon_0 R$, l'énergie du champ électrique est : $W_E = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$.

2.24.2. Densité de l'énergie électrique

On considère à titre d'exemple un condensateur plan :

Sa capacité est : $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$

L'énergie qu'il emmagasine est : $W_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} V^2$

Si on divise cette énergie par le volume du condensateur, on obtient ce que l'on appelle : densité de l'énergie électrique .

$$W = \frac{W_E}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{d} \frac{V^2}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{d^2} \rightarrow \quad (1)$$

On sait que l'intensité du champ électrique entre les armatures est : $E = \frac{V}{d}$

Après substitution, l'équation (1) de la densité de l'énergie électrique s'écrit :

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (2-97)$$

W :représente la densité de l'énergie électrique dans le vide. Son unité est le joule par mètre cube ($J \cdot m^{-3}$)

En présence d'un isolant, autre que le vide, on remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, où ϵ_r représente la permittivité relative de l'isolant, tandis que ϵ_0 désigne la permittivité absolue.

On peut donc écrire la densité de l'énergie sous la forme : $W = \frac{\epsilon}{2} E^2 \quad (2-98)$

2.25. Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

2.25.1.Charge d'un condensateur

Soit le montage indiqué sur la figure (2.54), composé d'une résistance R montée en série avec un condensateur de capacité C . On alimente l'ensemble à l'aide d'une source de tension continue V_0 .

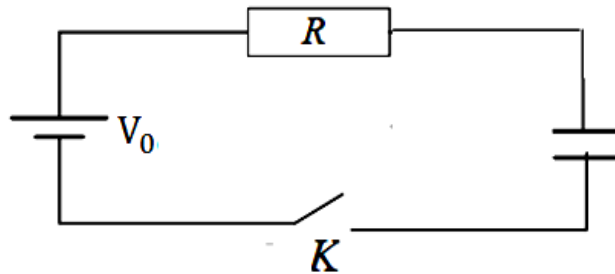


Figure (2.54): Montage pour l'étude de la charge d'un condensateur

A l'instant $t = 0$, le condensateur est vide de charge, on ferme l'interrupteur K . Soit $i(t)$ l'intensité du courant électrique parcourant le circuit au temps t . Les électrons se déplacent dans le sens contraire du courant. Ces électrons quittent l'armature de haut, selon la figure (2.55), et arrivent à l'armature d'en bas qui se charge négativement. Soient $q(t)$ et $u(t)$ la charge de l'armature de haut et la tension électrique entre les armatures du condensateur (les grandeurs i , q et u sont positives par convention). Figure (2.55).

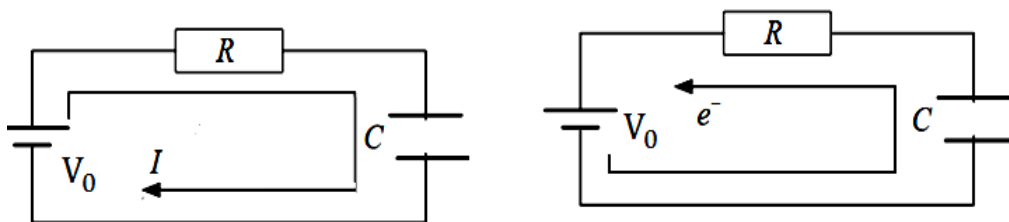


Figure (2.55):Charge d'une condensateur

loi d'Ohm nous permet d'écrire : $V = R i + V$

Sachant que $q = CV$ et $i = \frac{dq}{dt}$ (qui représente l'augmentation de la charge durant le temps dt).

On obtient l'équation différentielle de premier ordre :

$$V_0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow V_0 C = RC \frac{dq}{dt} + q \quad \text{ou} \quad V_0 C - q = RC \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{V_0 C - q} = \frac{dq}{RC}$$

On intègre les deux membres de l'équation pour arriver à :

$$\ln(V_0 C - q) = -\frac{t}{RC} + A$$

La constante d'intégration A est déterminée à partir de la condition initiale : au temps $t = 0$, la charge est $q = 0$, et par conséquent : $A = \ln(V_0 C)$

D'où :

$$\ln(V_0 C - q) = -\frac{t}{RC} + A = -\frac{t}{RC} + \ln(V_0 C)$$

$$\Rightarrow \ln(V_0 C - q) - \ln(V_0 C) = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{(V_0 C - q)}{(V_0 C)} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{(V_0 C - q)}{(V_0 C)} = e^{(-\frac{t}{RC})}$$

Finalement, l'expression de la charge du condensateur est :

$$q(t) = V_0 C (1 - e^{(-\frac{t}{RC})}) \quad (2-99)$$

2.25.1a. Définition

On appelle constante de temps la grandeur constante : $\tau = RC$ (2-100)

2.25.1b. Durée de la charge ou décharge

Les expériences ont prouvé, comme le prévoyait la théorie, que la durée de la charge ou la décharge d'un condensateur est estimée à : $t = 5RC = 5\tau$. La figure (2.56) représente la variation de la charge en fonction du temps au cours de la charge.

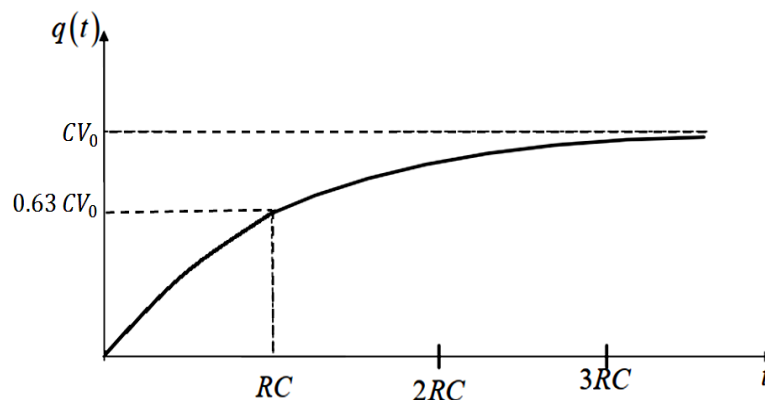


Figure (2.56):Variation de la Charge du condensateur au cours de la charge

On en déduit l'intensité du courant à chaque instant $i(t) = \frac{dq}{dt}$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2-101)$$

La figure. (2.57) représente les variations de l'intensité du courant électrique en fonction du temps au cours de la charge.

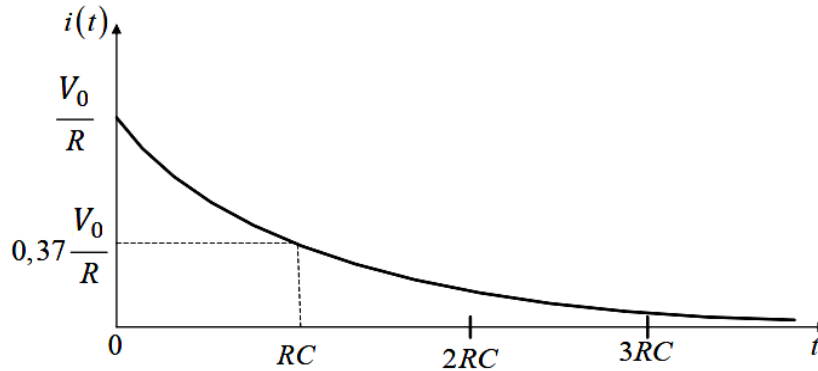


Figure (2.57):Variation de l'intensité du courant au cours de la charge

2.25.1c. Décharge d'un condensateur

Après que le condensateur ait atteint sa charge maximale $q_0 = CV_0$, on remplace à présent (à $t = 0$), la source de tension par un court circuit, comme il est indiqué sur la figure(2.58).

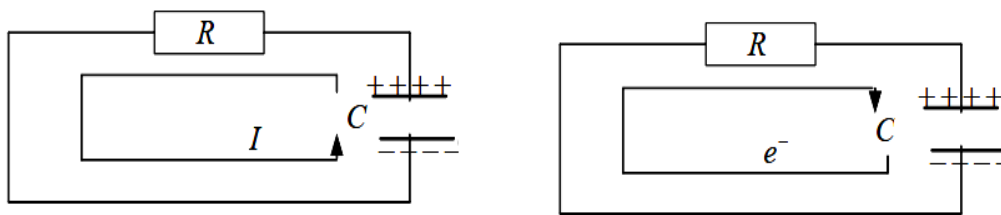


Figure (2.58):Décharge d'une condensateur

Le courant a changé maintenant de sens : les électrons quittent l'armature d'en bas pour atteindre l'armature d'en haut.

La charge $q(t)$ diminue au cours du temps.

En considérant toujours les grandeurs i , q et V positives par convention, on écrit la

loi d'Ohm : $V = Ri$, avec $q = CV$, et $i = \frac{dq}{dt}$

Puisque q diminue $\frac{dq}{dt} < 0$. Donc : $-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow R \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{C}$

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + B$$

La constante B est déterminée par la condition initiale:

$$t = 0, q = q_0 = CV_0 \text{ , } B = \ln q_0 \Rightarrow B = \ln CV_0$$

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + \ln CV_0 \Rightarrow \ln \frac{q}{CV_0} = -\frac{t}{RC}$$

Donc les expressions de la charge et de l'intensité du courant instantanées sont respectivement

$$: q = CV_0 e^{(-\frac{t}{RC})} \quad (2-102)$$

$$i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow i = \frac{V_0}{R} e^{(-\frac{t}{RC})} \quad (2-103)$$

La figure (2.59) représente la variation de la charge en fonction du temps au cours de la décharge :

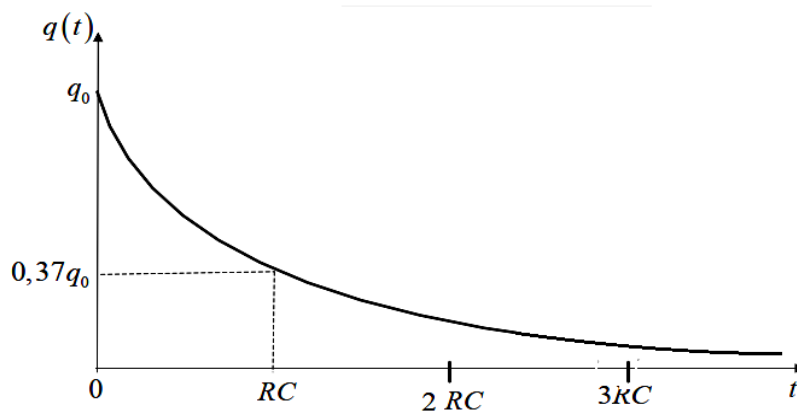


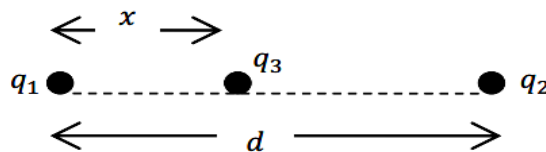
Figure (2.59): Variation de la charge du condensateur au cours de sa décharge

Exercices Corrigés

Exercice:01

Une charge $q_3 = q$ a été placée entre deux autres charges $q_1 = q$, $q_2 = \frac{q}{9}$, q_1 et q_2 étant séparées par une distance d .

- 1- Calculer en fonction de x la force totale appliquée à q_3 .
- 2- Calculer la position d'équilibre x_0 de la charge q_3 .



Solution

- 1- Force appliquée par q_1 sur q_3 .

$$\vec{F}_{13} = K \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \vec{u}_{13} \quad , \text{ en module } F_{13} = K \frac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2} = K \frac{q^2}{(x)^2}$$

Force appliquée par q_2 sur q_3

$$\vec{F}_{23} = K \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \vec{u}_{23} \quad , \text{ en module } F_{23} = K \frac{|q_2 q_3|}{r_{23}^2} = K \frac{1}{9} \frac{q^2}{(d-x)^2}$$

$$\text{Force totale (vecteur)} : \vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \left(K \frac{q^2}{(x)^2} - K \frac{1}{9} \frac{q^2}{(d-x)^2} \right) \vec{u}_{13} \quad \text{ Avec : } \vec{u}_{23} = -\vec{u}_{13}$$

$$\text{Condition d'équilibre de : } \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0 \quad , \text{ en module } F_{13} = F_{23} \Rightarrow K \frac{q^2}{(x)^2} = K \frac{1}{9} \frac{q^2}{(d-x)^2}$$

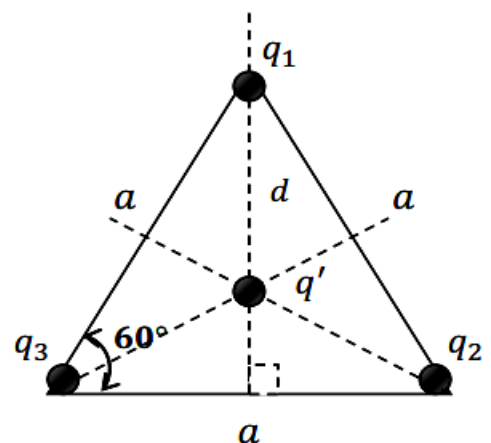
$$\text{D'où : } x^2 = 9(d-x)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = +3(d-x) \\ x = -3(d-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}d \\ x_2 = \frac{3}{2}d \end{cases}$$

2- La solution $x_2 = \frac{3}{2}d$ Donc, la position d'équilibre est refusée car elle se trouve en dehors du domaine $[q_1, q_2]$.

Exercice:02

Trois charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 se trouvent aux sommets d'un triangle **équilatéral** de côté a , comme le montre la figure. On place une charge $q' = +q$ au centre du triangle.

1. Calculez la distance d entre chaque sommet du triangle et son centre en fonction de a .
2. Calculez la force électrique exercée sur la charge q' quand $q_1 = q_2 = q_3 = q$.



3. Calculez en fonction de a et de q la force exercée sur la charge q' quand $q_1 = -q$ et $q_2 = q_3 = q$.

4. A.N : $a = 6 \text{ cm}$; $q = 8 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

Solution

$$1 - \alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 90 - \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{a/2}{d} \Rightarrow d = a/3$$

$$2 - \vec{F}_i = K \frac{q_i q'}{r_i^2} \vec{u}_i = K \frac{q^2}{d^2} \vec{u}_i \text{ en module } F_i = K \frac{q^2}{d^2}$$

En projetant suivant l'axe vertical (OY)

$$F_{1y} = -K \frac{q^2}{d^2} \text{ et } F_{2y} = F_{3y} = K \frac{q^2}{d^2} \cos(\beta) = \frac{1}{2} K \frac{q^2}{d^2}$$

$$\text{Donc: } F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$$

En projetant suivant l'axe horizontal (OX)

$$F_{1x} = 0 ; F_{2x} = -K \frac{q^2}{d^2} \sin(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} K \frac{q^2}{d^2}$$

$$F_{3x} = K \frac{q^2}{d^2} \sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} K \frac{q^2}{d^2}$$

$$\text{Donc: } F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

$$\text{Finalement: } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

$$3 - \vec{F}_i = K \frac{q_i q'}{r_i^2} \vec{u}_i \Rightarrow \vec{F}_1 = -K \frac{q^2}{d^2} \vec{u}_1 ; \quad \vec{F}_2 = K \frac{q^2}{d^2} \vec{u}_2 .$$

$$\vec{F}_3 = K \frac{q^2}{d^2} \vec{u}_3$$

$$\text{en module: } F_i = K \frac{q_i q'}{d^2}$$

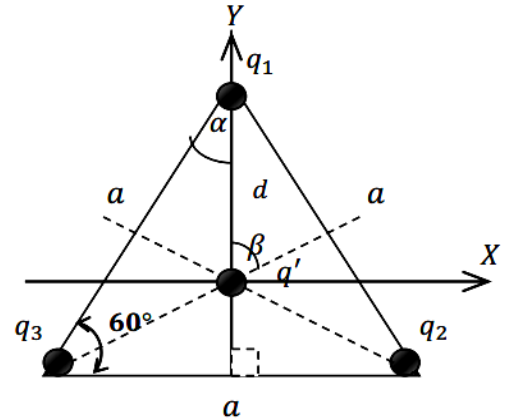
En projetant suivant l'axe vertical (OY) :

$$F_{1y} = K \frac{q^2}{d^2} \text{ et } F_{2y} = F_{3y} = K \frac{q^2}{d^2} \cos(\beta) = \frac{1}{2} K \frac{q^2}{d^2}$$

$$\text{Donc: } F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 2K \frac{q^2}{d^2} = 6K \frac{q^2}{d^2}$$

En projetant suivant l'axe horizontal (OX)

$$F_{1x} = 0 ; F_{2x} = -K \frac{q^2}{d^2} \sin(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} K \frac{q^2}{d^2} ; F_{3x} = K \frac{q^2}{d^2} \sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} K \frac{q^2}{d^2}$$



Donc: $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$

Finalement: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 6 K \frac{q^2}{d^2} \vec{e}_y$

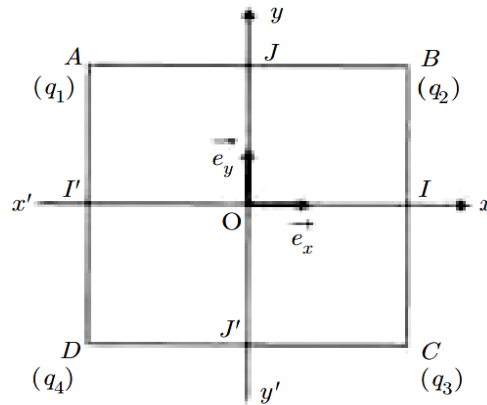
4. Application numérique : $F = 9,6 \times 10^{-6} \text{ N}$

Exercice:03

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté $a = 1 \text{ m}$, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.
On donne : $q_1 = q = 10^{-8} \text{ C}$, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$, $q_4 = -q$.

1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}$

2) Exprimer le potentiel V créé en O par les quatres charges.



Solution

1- Détermination du champ $\vec{E}$ en O.

Soit $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ et $\vec{E}_4$ les champs créés en O respectivement

par les charges q_1, q_2, q_3, q_4 .

On a : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$

Par raison de symétrie :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -2 E_1 \cos \frac{\pi}{2} \vec{e}_y$$

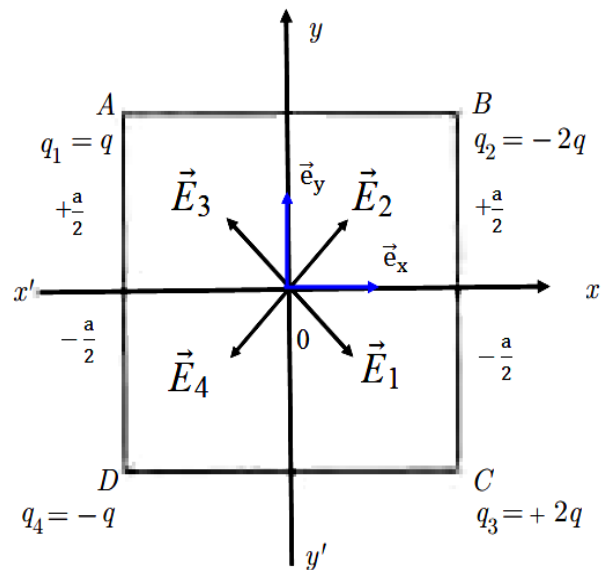
$$= -2K \frac{4q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y = -\frac{2 K q \sqrt{2}}{a^2} \vec{e}_y$$

$$\text{On a de même : } \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2 E_2 \cos \frac{\pi}{2} \vec{e}_y =$$

$$2K \frac{4q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y = \frac{4 K q \sqrt{2}}{a^2} \vec{e}_y$$

$$\text{Soit } \vec{E} = \frac{2 K q \sqrt{2}}{a^2} \vec{e}_y.$$

Le champ résultant $\vec{E}$ est donc dirigé suivant l'axe $y'oy$;



Dans le sens positif de l'axe $y'oy$:

- de norme: Soit $E = \frac{2 K q \sqrt{2}}{a^2}$.

$$E = 9.10^9.10^{-8}.2\sqrt{2} = 254.6 \text{ V.m}^{-1}$$

2-Détermination du potentiel V en O :

Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels créés par les charges q_1, q_2, q_3 , et q_4 en O .

$$V = V_1, V_2, V_3, V_4 = \frac{2Kq}{a\sqrt{2}} [1 - 2 + 2 - 1] = 0$$

Exercice:04

Soit une boucle circulaire de centre O , de rayon R , uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda = \lambda_0$ (voir figure). Calculer le champ $\vec{E}$ créée par cette distribution de charges, en un point M de l'axe $z'z$ de la boucle :

a) A partir du potentiel électrostatique

b) Directement

Solution

a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel $dV(M)$ créé en un point $M(0, 0, z)$ par la charge $dq = \lambda dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P (voir figure) est :

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le potentiel $V(M)$:

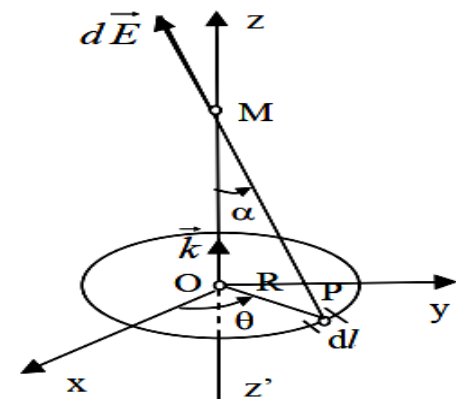
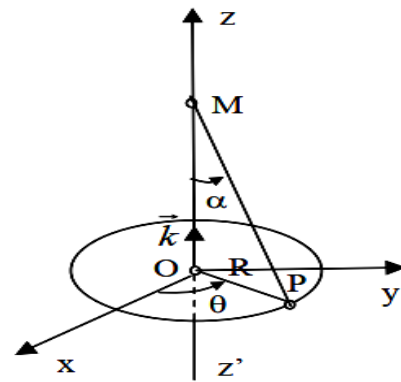
$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |PM|}$$

$$dl = R d\theta, \text{ et } PM = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :

$$V(M) = \int dV(M) = \frac{R\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R\lambda_0}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :



$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{Grad}} V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{K} = \frac{R\lambda_0 z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{K} = \vec{E}(0,0,z) = \vec{E}(0,0,-z)$$

b) Calcul direct du champ en un point $M(0,0,z)$.

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\vec{z'z}$. Tout plan contenant l'axe $\vec{z'z}$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ $\vec{E}$ en un point de l'axe $\vec{z'z}$ est porté par $\vec{K}$:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = \vec{E}(0,0,-z)$$

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le champ $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} = E_z \vec{K}$$

Le champ $E(M)$ étant porté par k , seule la composante dE_z est à considérer :

$$dE_z = d\vec{E}_z \cdot \vec{K} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \vec{K}}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cos \alpha}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ avec } \cos \alpha = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{E}(M) = \int_0^\pi dE_z \vec{K} = \frac{R\lambda_0 z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{K}$$

Exercice:05

Calculer le champ (en appliquant le théorème de gauss) et le potentiel électrostatique créée en tout point de l'espace par les distributions de charges suivantes.

1/ charge ponctuelle q positive placé en point O

2/ boule de centre O et de rayon R, chargée uniformément avec la densité surfacique de charge σ

3/ boule de centre O et de rayon R, chargée uniformément en volume de densité volumique de charge ρ

4/ Plan infini chargé uniformément avec la densité surfacique de charge σ

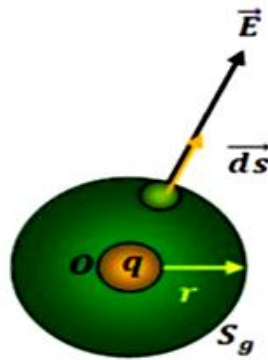
5/ fil rectiligne infini chargé uniformément avec la densité linéique de charge λ

6/ cylindre de longueur infinie chargée uniformément en volume de densité volumique de charge ρ

7/ cylindre de longueur infinie chargée uniformément avec la densité surfacique de charge σ

Solution

1- charge ponctuelle q positive placé en point O



$$= \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

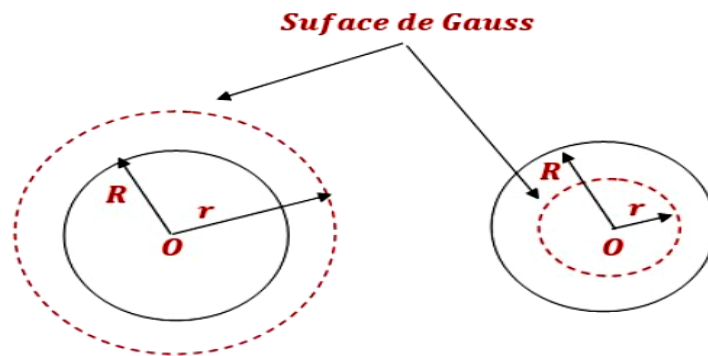
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E \, dS = E \oint dS = E S = E 4\pi r^2$$

$$\frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ Donc } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

-Le potentiel : $\vec{E} = -\vec{\text{Grad}} V \Rightarrow$

$$V = -E \int dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{Cte}$$

2- boule de centre O et de rayon R, chargée uniformément avec la densité surfacique de charge σ



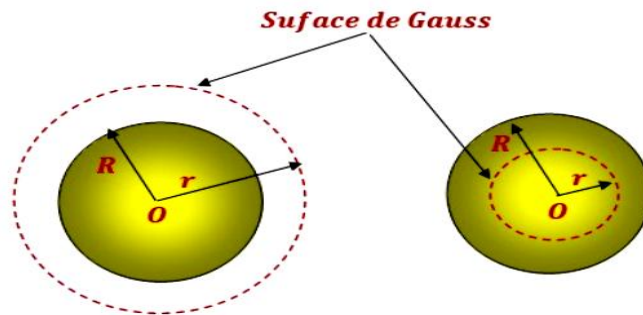
a- $r < R : q = 0 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow V = \text{Cte}$

Le flux à travers la surface sphérique de gauss est nul puisque cette surface ne contient pas de charges.

b- $r > R \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \oint E \, dS = E \oint dS = E S = E 4\pi r^2 \\ \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\sigma R^2}{\epsilon_0} \end{array} \right. \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{4\pi\sigma R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$

-Le potentiel: $\left\{ \begin{array}{l} V = -\int E \, dr \\ E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{array} \right. \Rightarrow V = -\int \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \, dr = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \, dr = +\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + \text{Cte}$

3- boule de centre O et de rayon R, chargée uniformément en volume de densité volumique de charge ρ



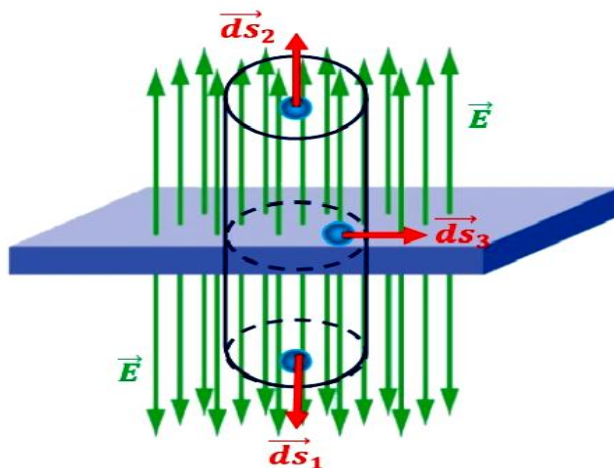
$$\text{a- } r < R: \begin{cases} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E \, dS = E \oiint dS = E S = E 4\pi r^2 \\ \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3} \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\frac{4\pi r^3}{3} \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \end{cases}$$

$$\text{-Le potentiel: } \begin{cases} V = -\int E \, dr \\ E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \, dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r \, dr = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{Cte} \end{cases}$$

$$\text{b- } r > R: \begin{cases} \Phi = \oiint E \, dS = E \oiint dS = E S = E 4\pi r^2 \\ \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3} \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\frac{4\pi R^3}{3} \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{cases}$$

$$\text{-Le potentiel: } \begin{cases} V = -\int E \, dr \\ E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \Rightarrow V = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \, dr = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r} + \text{Cte} \end{cases}$$

4- Plan infini chargé uniformément avec la densité surfacique de charge σ



$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

$$\Phi = \oiint E \cdot dS_1 \cos 0 + \oiint E \cdot dS_2 \cos 0 + \oiint E \cdot dS_3 \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi_1 = E \cdot S_1, \cos 0 = 1$$

$$\Phi_2 = E \cdot S_2, \cos 0 = 1$$

$$\Phi_3 = 0, (d\vec{S}_3 \perp \vec{E}), (\theta = \frac{\pi}{2}), \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$S = 2\pi r h, \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi r h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2, S_1 = S_2 = S$$

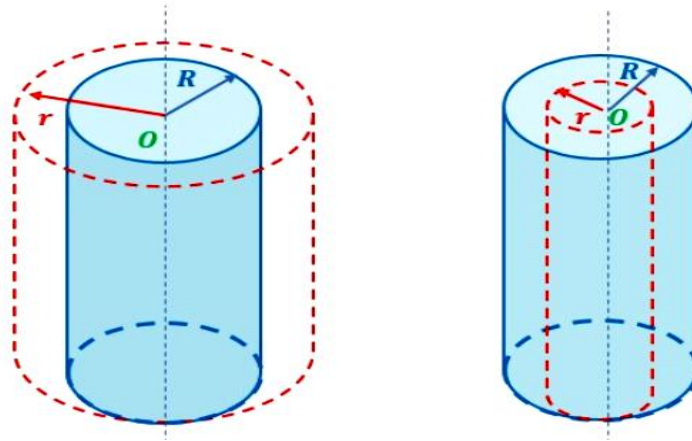
$$\text{Donc } \Phi = 2 E S = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi r h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\text{- Le Potentiel } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow dV = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz$$

$$\vec{E} = -E dz \Rightarrow V = -\int_0^z E dz = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz$$

$$V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + \text{cte}$$

6- cylindre de longueur infinie chargée uniformément en volume de densité volumique de charge ρ



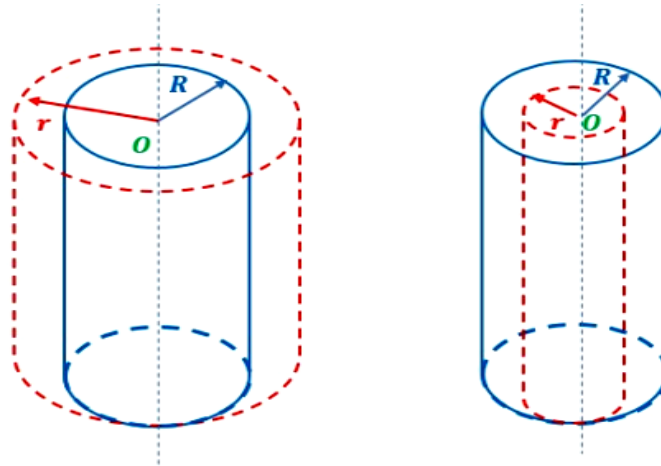
$$\text{a- } r < R: \begin{cases} \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = E S = E 2\pi r h \\ \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

$$\text{-Le potentiel: } \begin{cases} V = -\int E dr \\ E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \end{cases} \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{2\epsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int r dr = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + \text{Cte}$$

$$\text{b- } r > R: \begin{cases} \Phi = \oint E dS = E \oint dS = E S = E 2\pi r h \\ \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\text{-Le potentiel: } \begin{cases} V = -\int E dr \\ E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{cases} \Rightarrow V = -\int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} dr = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int \frac{1}{r} dr = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + \text{Cte}$$

7- cylindre de longueur infinie chargée uniformément avec la densité surfacique de charge σ



$$a- r > R \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \oint E dS = E \oint dS = E S = E 2\pi r h \\ \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R h}{\epsilon_0} \end{array} \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi R h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \right.$$

$$\text{-Le potentiel: } \left\{ \begin{array}{l} V = - \int E dr \\ E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \end{array} \Rightarrow V = - \int \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} dr = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int \frac{1}{r} dr = - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + Cte \right.$$

$$b- r < R : q = 0 \Rightarrow E = 0$$

Exercice:06

Considérons une boule en métal de rayon R ayant une charge globale Q .

1/ A l'équilibre, comment se répartissent les charges dans le conducteur ?

2/ En déduire l'expression de la densité surfacique de charge σ en Cm^{-2} .

3/ Que vaut le champ électrostatique dans le conducteur ?

4/ En appliquant le théorème de Coulomb, vérifier qu'à la surface du conducteur : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

5/ En utilisant le théorème de Gauss, montrer que l'intensité du champ électrostatique créé à la distance $r \geq R$ du centre du conducteur est : $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

Solution

/ A l'état d'équilibre, les charges se répartissent sur la surface du conducteur c'est-à-dire sur la surface de la sphère. A l'intérieur du conducteur la charge totale est nulle.

2/ Dédution de l'expression de la densité surfacique de la charge :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \frac{q}{S} \\ S = 4\pi R^2 \end{array} \right| \Rightarrow \sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \text{ C/m}^2$$

3/ Dans un conducteur en équilibre, le champ électrostatique est nul.

4/ D'après le théorème de Coulomb on a : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \text{ (V/m)}$

5/ Pour appliquer le théorème de Gauss, considérons une surface sphérique fermée de rayon r . Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est : $\Phi = \oint E \, dS = E S = E 4 \pi r^2$.

Donc, l'intensité du champ électrostatique produit à la distance $r \geq R$ du centre du conducteur est : $E 4 \pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ (V/m)

Exercice:07

Une sphère de rayon R porte une charge Q .

1/ Calculer son énergie potentielle en fonction de la pression électrostatique.

2/ On décharge cette sphère en la reliant à la terre par l'intermédiaire d'un fil métallique. Que devient l'énergie emmagasinée précédemment ?

3/ On suppose que cette sphère a été chargée à l'aide d'une source de force électromotrice E constante. Quelle est l'énergie fournie par la source à la sphère ? La trouve-t-on sous forme d'énergie potentielle ? Sinon, où a disparu la différence ?

4/ soit σ la densité surfacique de charge de la sphère :

a) calculer sa capacité en fonction de , ϵ_0 et σ

b) trouver une relation littérale entre l'énergie interne et la pression électrostatique.

Solution

1/ On sait que pour charger un conducteur, il faut fournir un travail. Pour ajouter une charge élémentaire dq (en supposant qu'on la ramène de l'infini où $V_\infty = 0$) à un conducteur, il faut fournir un travail élémentaire : $dW_e = dq (V_\infty - V)$. L'énergie potentielle élémentaire est donc $dE_p = -dW_e \Rightarrow dE_p = dq V$. Pour obtenir l'énergie totale il faut intégrer :

$$E_p = \int_0^q V \, dq = \int_0^q \frac{q}{C} \, dq = \frac{1}{C} \int_0^q q \, dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$q = V C \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} C V^2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{R} \\ q = \sigma 4 \pi R^2 \end{array} \right| \Rightarrow V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R \quad (2)$$

En remplaçant le potentiel par sa valeur(2) dans l'équation(1), on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} C = 4 \pi \epsilon_0 R \\ V^2 = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} R^2 \end{array} \right| \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} (4 \pi \epsilon_0 R) \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} R^2 \right) = 2 \pi \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} R^3 = 4 \pi R^3 P_e$$

2/ Au cours de l'opération de décharge, l'énergie qui était sur la surface de la sphère se transforme en énergie calorifique par effet joule dans le fil joignant la sphère à la terre.

3/ L'énergie fournie par la source de tension à la sphère est $E_p = q V = C V^2$, c'est le double de l'énergie emmagasinée dans la sphère conductrice à la fin. L'autre moitié s'est transformée en énergie calorifique au cours du transfert des charges à travers le fil métallique.

Exercice:08

Une sphère métallique de rayon $R_1 = 1$ m porte une charge électrique totale $Q = 10^{-9}$ C. On la relie par un fil conducteur à une sphère initialement non chargée de rayon $R_2 = 0,30$ (placée à grande distance de la première sphère) de telle sorte qu'elles se mettent au même potentiel.

1/ Quelle sera la charge à l'équilibre sur chacune des sphères après que la connexion sera faite

2/ Quelle est l'énergie de la sphère chargée avant la connexion ?

3/ Quelle est l'énergie du système après que les sphères soient reliées entre elles ? S'il y a une perte, expliquer où a été dissipée.

4/ Montrer que la charge est distribuée sur les deux sphères reliées entre elles de telle sorte que: $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$ où σ est la densité superficielle de charge.

5/ Montrer en conséquence que: $\frac{E_{1(\text{surface})}}{E_{2(\text{surface})}} = \frac{R_2}{R_1}$, On négligera dans le problème l'effet du fil de jonction.

Solution

1/ Les deux sphères sont au même potentiel, $V_1 = V_2$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (1)$$

D'après le principe de la conservation de la charge, on a : $Q = Q_1 + Q_2$ (2)

Des équations (1) et (2) on peut en déduire la charge de chaque sphère :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 R_2 = Q_2 R_1 \\ Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_1 = Q - Q_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_2 = \frac{Q}{\frac{R_1}{R_2} + 1} \\ Q_1 = Q \frac{R_1}{R_2} \end{array} \right| \Rightarrow Q_2 = \frac{3}{13} 10^{-9} \text{ C}, \text{ et } Q_1 = \frac{10}{13} 10^{-9} \text{ C}$$

2/ L'énergie de la sphère avant la connexion (La capacité C d'un conducteur sphérique étant

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1) : W = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} = 4.5 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

3/ L'énergie du système après la connexion des deux sphères entre elles :

$$W = W_1 + W_2 \quad \left| \quad W = \frac{Q_1^2}{8 \pi \epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2^2}{8 \pi \epsilon_0 R_2} \right| \Rightarrow W = \frac{1}{8 \pi \epsilon_0} \left[\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2} \right] \Rightarrow W = 4.46 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

On remarque une perte d'énergie, bien qu'elle soit négligeable. Puisque l'effet du fil n'est pas pris en considération, on peut expliquer la perte d'énergie comme étant une transformation en radiation électromagnétique à l'instant de la connexion des deux sphères.

$$4/ \text{ De l'équation (1) , on déduit : } \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{4\sigma_1 \pi R_1^2}{R_1} = \frac{4\sigma_2 \pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

5/ En appliquant le théorème de Gauss, on peut calculer le champ électrique à la surface

$$\text{de la sphère : } E \cdot S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{1(\text{surface})} &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \\ E_{2(\text{surface})} &= \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{E_{1(\text{surface})}}{E_{2(\text{surface})}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Exercice 09

Un condensateur de capacité $C = 100 \text{ } \mu\text{F}$ est chargé sous une tension $V = 20 \text{ v}$. On le relie à un condensateur de même capacité C , mais initialement déchargé.

1/ Calculer la tension qui apparaît aux bornes de l'ensemble.

2/ Faire le bilan énergétique avant et après connexion. Commenter ?

Solution

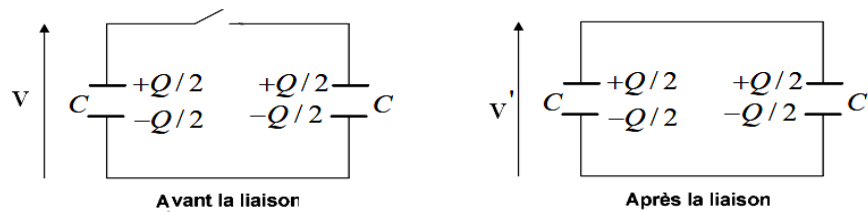
1/ Après la liaison des deux condensateurs, la charge Q , que portait le premier condensateur, se répartit sur les deux condensateurs, tel que chaque condensateur porte la charge $\frac{Q}{2}$

$$\text{La tension entre les deux bords du système est : } \frac{Q}{2} = C V' \Rightarrow V' = \frac{Q}{2C} = 10 \text{ v}$$

2/ Inventaire des énergies :

$$\text{Avant la liaison : } W = \frac{1}{2} C V^2 = 20 \text{ } \mu\text{J}$$

$$\text{Après la liaison : } W' = \frac{1}{2} C V'^2 + \frac{1}{2} C V'^2 = 10 \text{ } \mu\text{J}$$



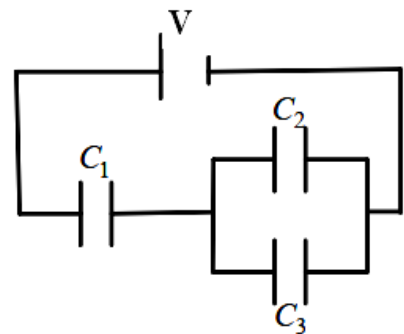
Commentaire : La différence entre les deux résultats est la perte de $10 \mu J$. Cette perte d'énergie n'a pas disparue .

Interprétation : Lors de la liaison des deux condensateurs, le courant de décharge produit un champ magnétique : les $10 \mu J$ se sont transformés en radiation électromagnétique (C'est comme l'effet qui se produit au niveau des antennes d'émission des ondes radio). Pour se convaincre, on place un poste radio à proximité du circuit : on entend un crépitement caractéristique qui résulte de la réception d'ondes électromagnétiques émises au moment de la fermeture du circuit. Pour la même raison, on peut entendre à la radio ces crépitements lors de l'éclatement d'un tonnerre.

Exercice 10

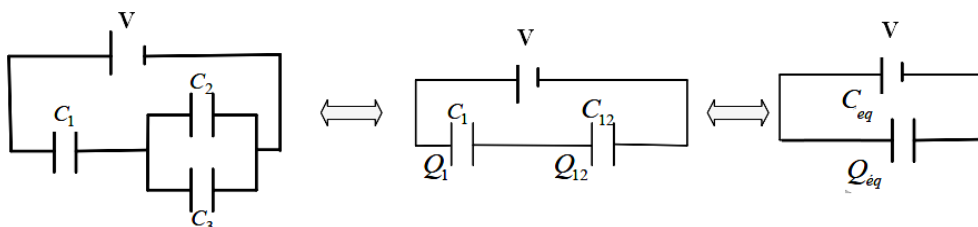
Un générateur de tension continue et trois condensateurs sont assemblés comme indiqué sur la figure ci-dessous : $V = 3V$, $C_1 = 30 \mu F$, $C_2 = 10 \mu F$, et $C_3 = 5 \mu F$.

Quelles sont les charges Q_1 , Q_2 , et Q_3 , que portent les trois condensateurs ?



Solution

On peut simplifier le montage comme indiqué sur la figure suivante :



Les condensateurs C_2 et C_3 sont montés en parallèle, soit C_{12} leur capacité équivalente :

$$C_{12} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{12} = 10 \mu F$$

Les condensateurs C_{12} et C_1 sont montés en série, soit $C_{\text{éq}}$ leur capacité équivalente :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{12}} \Rightarrow C_{\text{éq}} = \frac{C_1 + C_{12}}{C_{12} C_1} = 10 \mu\text{F}$$

La charge totale du système est : $Q_{\text{éq}} = C_{\text{éq}} V = 30 \mu\text{C}$

La charge du condensateur C_1 est : $Q_1 = Q_{12} = Q_{\text{éq}} = 30 \mu\text{C}$

La tension entre les armatures du condensateur équivalent C_{12} est : $V_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = 2 \text{ V}$

La charge du condensateur de capacité C_2 est : $Q_2 = C_2 V_{12} = 20 \mu\text{C}$

La charge du condensateur de capacité C_3 est : $Q_3 = C_3 V_{12} = 10 \mu\text{C}$

négatif, le calcul est correct, le sens réel est le sens inverse,

Chapitre 3. Electrocinétique

3.Introduction

L'électrocinétique est l'étude des courants électriques, c'est - à- dire l'étude des charges électriques en mouvement dans des milieux matériels appelés conducteurs. Autrement dit, c'est l'étude des circuits et réseaux électriques.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux causes qui provoquent le mouvement de charges, ainsi que les causes qui s'opposent à leur mouvement.

3.1. Courant électrique

3.1.1. Définition

Le courant électrique est un déplacement collectif et organisé des porteurs de charges (électrons ou ions). Cet écoulement de charges peut se produire dans le vide (faisceau d'électrons dans les tubes cathodiques....), ou dans la matière conductrice (les électrons dans les métaux, ou les ions dans les électrolytes).

Un courant électrique apparaît dans un conducteur quand une différence de potentiel est établie entre les bornes de ce dernier.

3.1.2. Intensité du courant électrique

L'intensité du courant électrique est un nombre décrivant le débit de charge électrique à travers une surface donnée, notamment la section d'un fil électrique.

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \quad (3-1)$$

Où : I est l'intensité du courant.

q :la charge électrique.

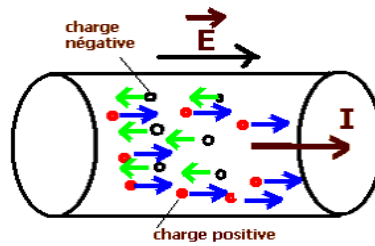
t: le temps.

Dans le système international d'unités, l'intensité du courant se mesure en ampères, une unité de base dont le symbole normalisé est A. Un ampère correspond à un débit de charge d'un coulomb par seconde. (A) : $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$

3.1.3. Sens du courant

Le courant électrique circule dans le sens décroissant des potentiels, c'est-à-dire dans le sens du champ électrique. Ainsi, le sens choisi conventionnellement est contraire au sens des

charges négatives L'intensité se mesure à l'aide d'un ampèremètre qui doit être branché en série dans le circuit.



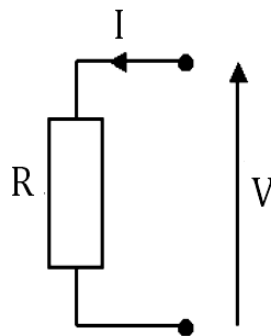
Figure(3.1): sens conventionnel du courant électriques

3.2. Loi d'Ohm

La différence de potentiel ou tension V (en volts) aux bornes d'une résistance R (en ohms) est proportionnelle à l'intensité du courant électrique I (en Ampères) qui la traverse (figure 3-1)

$$V = R \cdot I \quad (3-2)$$

Cette relation entre l'intensité du courant, la tension et la résistance est connue sous le nom de la loi d'Ohm. La résistance se mesure en ohms (Ω)



Figure(3.2): Symbole du Résistance

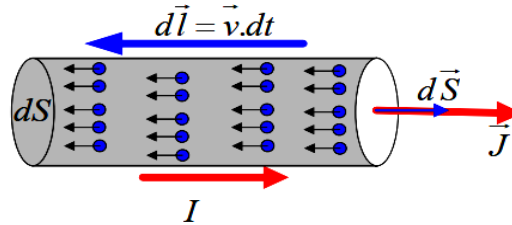
La loi d'Ohm montre que pour une différence de potentiel déterminée, on peut mettre dans le circuit un nombre de résistances, en vue de limiter l'intensité du courant électrique qui traverse l'appareil alimenté électriquement.

3.3. Densité de courant

Nous avons défini le courant électrique comme étant un écoulement de charges dans le vide ou à travers un milieu matériel conducteur. On peut exprimer l'intensité du courant

électrique en fonction de la vitesse des charges mobiles (libres).

On considère un conducteur de section dS . Soit n le nombre de charges q mobiles, se déplaçant à la vitesse constante $\vec{v}$, et contenues dans un volume V .



Figure(3.2):densité de courant

En un temps très court dt les charges progressent d'une distance : $d\vec{l} = \vec{v} dt$. Pendant la même durée dt , la charge dQ contenue dans le volume élémentaire dV du conducteur est donc : $dQ = nq dV$.

Et puisque : $dV = d\vec{l} d\vec{S}$.

On a : $dQ = nq \vec{v} dt d\vec{S}$

3.3.1. Définition : La densité de courant $\vec{J}$ est un vecteur décrivant le courant électrique à l'échelle locale. Sa direction indique celle du déplacement des porteurs de charge (mais son sens peut être opposé pour des porteurs négatifs) et sa norme correspond à l'intensité du courant par unité de surface. Elle est relié au courant électrique par :

$$\vec{J} = nq\vec{v} \quad (3-3)$$

$$\text{On peut donc écrire : } dQ = \vec{J} dt d\vec{S} \quad (3-4)$$

Dans le cas d'un cristal composé d'ions au repos et d'électrons libres mobiles, on' a :

$$\vec{J} = -ne\vec{v} \quad (3-5)$$

On remarque ici que le vecteur densité de courant $\vec{J}$ est de sens contraire au sens du mouvement réel des électrons, c'est - à - dire que le sens du courant est le même que celui du vecteur $\vec{J}$.

Si $\vec{S}$ représente le vecteur surface de la section transversale du conducteur, et qui est colinéaire au vecteur $\vec{J}$, l'intensité du courant est donc la grandeur scalaire :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \vec{J} \cdot \vec{S} = n q V S \quad (3-6)$$

On exprime l'unité de la densité de courant par ampère par mètre carré ($A \cdot m^{-2}$)

Exemple

La masse molaire du cuivre est $M = 63,54 \text{ g mol}^{-1}$, et sa masse volumique $\rho = 8,8 \cdot 10^3 \cdot \text{kg m}^{-3}$

- a/ Calculer le nombre d'électrons par unité de volume,
- b/ En admettant que chaque atome de cuivre libère deux électrons, et qu'un fil en cuivre de section 10 m^2 est traversé par un courant d'intensité 30 A , calculer la densité de courant,
- c/ En déduire la vitesse de déplacement des électrons à l'intérieur du cristal de cuivre.

Solution

a/ Calcul du nombre d'atomes dans la matière cuivre :

$$\eta = \frac{N\rho}{M} = \frac{6,03 \cdot 10^{23} \cdot 8,8 \cdot 10^6}{63,54} = 8,35 \cdot 10^{28} \quad \text{atomes}$$

b/ Calcul de la densité : $J = \frac{3}{S} = \frac{30}{10^{-6}} = 3 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$

c/ Déduction de la vitesse de déplacement des électrons libres :

$$J = n e V \Rightarrow V = \frac{J}{n e} = \frac{3 \cdot 10^6}{2,835 \cdot 10^{28} \cdot 1,66 \cdot 10^{-19}} = 108 \text{ m} \cdot \text{S}^{-1}$$

3.3.2. Relation entre le champ électrique et la densité de courant électrique

On considère une portion $AB = l$, d'un conducteur, traversé par un courant électrique d'intensité I . Le passage d'un courant électrique implique obligatoirement l'existence d'une différence de potentiel entre les points A et B.

Nous savons comment calculer la différence de potentiel appliquée entre deux points :

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3-7)$$

Si le conducteur est un fil de section S , le champ électrostatique est uniforme sur toute la portion AB.

Puisque $V=E l$, On a : $V = R.I = E.l \Rightarrow R J S = E.l$ (3-8)

Ainsi, on obtient une nouvelle expression de la densité de courant : $J = \frac{1}{S.R} E$ (3-9)

On pose $\sigma = \frac{1}{SR} = Cte$ (3-10)

On appelle cette constante : conductivité électrique du matériau conducteur, son unité est: $\Omega^{-1} . m^{-1}$.

La conductivité dépend des propriétés microscopiques de la matière conductrice, c'est une quantité locale utile qui permet de distinguer les propriétés électriques de la matière. Sur cette base de conductivité , les matériaux sont classés en conducteurs , isolants et semi conducteurs.

L'inverse de la conductivité s'appelle résistivité électrique du conducteur (ou résistance spécifique) . Son unité est l'ohm. Mètre ($\Omega . m$).

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{SR}{l} \quad (3-9)$$

Ainsi, l'expression de la résistance d'un conducteur peut s'écrire sous la forme :

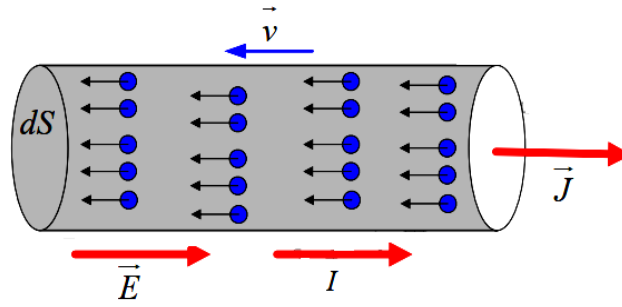
$$R = \frac{l}{RS} = \rho \frac{l}{S} \quad (3-10)$$

Cette expression simple, qui relie la résistance d'un fil cylindrique à ses caractéristiques géométriques, est connue sous le nom de loi de Pouillet, de son auteur Claude Pouillet 1719-1868.

3.3.3. Relation entre $\vec{E}$, $\vec{J}$ et I

Dans l'équation $\vec{J} = \frac{1}{SR} \vec{E}$, on constate que $\vec{E}$ et $\vec{J}$ sont de même sens.

Et puisque I et $\vec{E}$ sont de même sens, le courant électrique circule dans le sens des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{J}$.



Figure(3.3): sens de $\vec{E}$, $\vec{J}$ et I

3.4. Effet de Joule :(James Prescott Joule 1818-1889)

D'après la définition du potentiel électrique, le travail dW effectué par la charge élémentaire dq se déplaçant entre les deux points entre lesquels règne une différence de potentiel électrique (ou tension) V est : $dW = V dq$.

On définit , de façon générale (en électricité comme en mécanique), la puissance comme étant le travail effectué par unité de temps, soit : $P = \frac{dW}{dt}$

Dans notre cas, nous avons : $P = \frac{dW}{dt} = \frac{V dq}{dt} V. I$

Donc, on peut écrire : $P = V. I$ (3-10)

Cette relation traduit ce qui est connu sous le nom d' effet joule dans le cas général. L'unité de la puissance est le watt(W) .

Pour les dipôles soumis à la loi d'Ohm, le passage du courant électrique qui les parcourt provoque leur échauffement ou dégagement de chaleur : ce phénomène est aussi appelé effet joule. En effet un dipôle passif transforme l'énergie électrique en énergie calorifique. La puissance dissipée par le dipôle est égale à : $P = R I^2$ (3-11)

L'unité de la puissance est le watt (W).

R : la résistance du conducteur.

I : l'intensité du courant qui traverse le conducteur.

D'après la définition de l'énergie, on en déduit que, l'énergie E consommée par une résistance pendant le temps t est égale à : $E = V. I. t = R. I^2 t = \frac{V^2}{R} t$ (3-12)

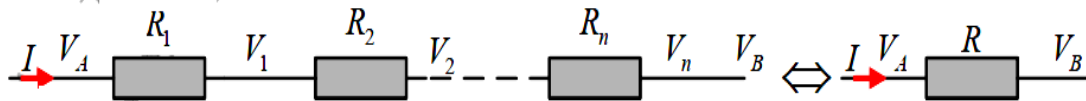
L'unité de l'énergie est le joule (J)

3.5. Rappel sur le groupement des conducteurs ohmiques

On distingue deux cas pour le groupement de conducteurs ohmiques ou résistances :

3.5.a. Groupement en série : Figure (3.4)

Toutes les résistances R_i sont parcourues par le même courant électrique I , et chacune d'elles n'a qu'une extrémité commune avec un autre dipôle. La tension V_{AB} est égale à la somme des tensions des dipôles (résistances).



Figure(3.4): Groupement des Résistances en séries.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = R \cdot I$$

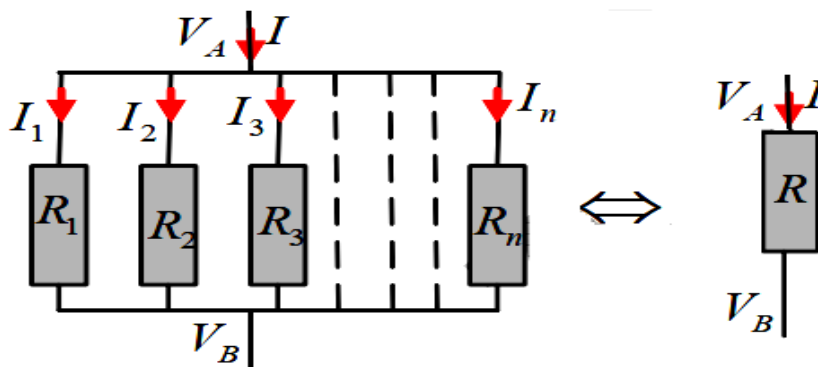
$$V = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I = R \cdot I$$

Ainsi, on obtient la résistance équivalente de tous les dipôles passifs groupés en série :

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3-13)$$

3.5.b. Groupement en parallèle : Figure(3.5)

Ce groupement est caractérisé par le fait que tous les dipôles ont leurs bornes communes deux à deux. La tension est la même entre les extrémités de n'importe quelle résistance R_i .



Figure(3.5):Groupement des Résistances en séries.

Le courant électrique qui alimente la portion de circuit se répartit entre les dipôle, tel que :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \dots + \frac{V}{R_n} \Rightarrow \frac{V}{R} = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right] V$$

Ainsi, on obtient la résistance équivalente des dipôles passifs montés en parallèle ou en

$$\text{dérivation : } \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (3-14)$$

3.6. Eléments d'un circuit électrique

Toutes les applications en électricité exploitent la facilité avec laquelle s'effectue la transformation de l'énergie électrique à partir d'une source électrique vers un appareil quelconque (fer à repasser, lampe, téléviseur,...).

Cette transformation se fait par l'intermédiaire d'un circuit électrique qui relie la source à l'appareil, et permet le déplacement des électrons. Il existe une variété de sources électriques, telles que : les piles, les batteries, les cellules solaires, les générateurs... Dans tous ces cas, chaque source a deux pôles au moins entre lesquelles règne une différence de potentiel.

3.6.1. Eléments et vocabulaire du circuit électrique

Le circuit électrique est composé d'un groupement d'éléments, appelés dipôles, reliés entre eux par des fils conducteurs ; le tout constitue une structure fermée. Nous citons ci après quelques éléments et le vocabulaire propres au circuit.

- **Le nœud** : c'est un point d'un circuit où arrivent trois fils au moins, ou plus.

- **La branche** : c'est une portion de circuit qui s'intercale entre deux nœuds.

- **La maille**: c'est un ensemble de branches qui constituent une boucle fermée.

- **Le dipôle**: un dipôle s'intercale dans un circuit à l'aide de deux pôles, le courant entrant par l'un d'eux, et sortant par l'autre. Un dipôle est caractérisé par sa réponse à une différence de potentiel, c'est-à-dire par une courbe caractéristique $V = f(I)$.

Le dipôle passif: c'est un dipôle qui consomme l'énergie électrique.

Le dipôle actif: c'est un dipôle qui produit du courant électrique.

- **Le dipôle linéaire**: sa courbe caractéristique $V = f(I)$ est une droite.

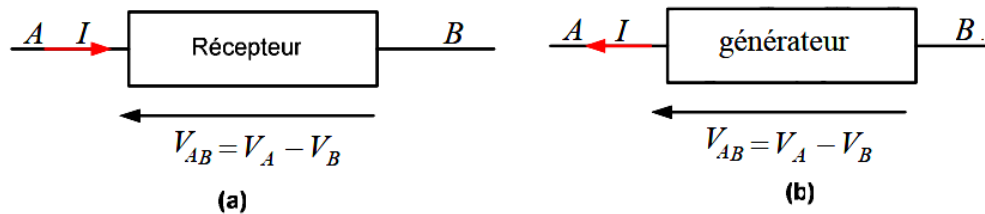
Les fils de jonction: on néglige leurs résistances par rapport aux résistances des autres dipôles. On les considère comme étant équipotentiels.

- **Le réseau**: c'est un ensemble de circuits.

* **Convention** : Dans l'étude pratique des dipôles, on utilise deux conventions :

- **La convention récepteur**: la tension et l'intensité électriques sont orientées positivement et dans deux sens opposés. Figure 3.9 (a).

- **La convention générateur:** la tension et l'intensité électriques sont orientées positivement et dans le même sens. Figure (3.6).



Figure(3.6): Conventions Récepteur et Générateur

3.7. Nécessité de la disponibilité d'une force électromotrice

Le générateur doit fournir un travail électrique aux charges pour qu'elles puissent le traverser en allant du pôle à potentiel inférieur au pôle à potentiel élevé. Le travail du générateur est semblable à celui d'une pompe hydraulique qui, remonte l'eau d'un niveau inférieur à un niveau supérieur. Il est aisé de comprendre le phénomène du courant électrique en le comparant au courant d'eau dans un fleuve. L'eau court dans une région élevée vers une région inférieure, grâce à la force d'attraction (le poids). Mais, si on veut créer un circuit hydraulique fermé, il est indispensable de fournir une énergie, d'où l'utilisation d'une pompe pour ramener l'eau à une plus haute altitude. On peut définir la force électromotrice d'une source électrique comme étant un travail fourni à l'unité de charge pour la transporter à travers un circuit fermé. Si dW est le travail fourni pour déplacer une charge de valeur dq à travers le circuit, en un temps bref dt , la force électromotrice e est donc : $e = \frac{dW}{dq}$

Et puisque la puissance est le travail fourni par unité de temps : $P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = e \frac{dq}{dt}$

D'où l'expression de la puissance : $P = e.V$ (3-16)

On sait, d'autre part que : $V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = e$

Dans le cas d'un circuit fermé : la puissance totale fournie entre A et A de la part de la force de Coulomb est égale à : $P = V.I = I \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = I(V_A - V_B) = 0$

On vient d'obtenir une puissance nulle. Cela veut dire que le champ électrostatique ne garantit pas la permanence du courant électrique dans un circuit fermé. Lorsqu'un courant électrique parcourt un circuit fermé, cela indique que la force de Coulomb

n'est pas responsable du mouvement collectif des porteurs de charge dans le conducteur. C'est ce qui se produit exactement dans un circuit électrique, où c'est une force, autre que la force électrostatique, qui doit permettre aux porteurs de charge de remonter le potentiel et le vaincre.

Pour obtenir un courant électrique continu, dans un circuit fermé, il est indispensable d'alimenter le circuit en énergie.

Les appareils qui produisent cette énergie s'appellent générateurs électriques, on peut dire que se sont des sources de force électromotrice.

3.8. Les deux types de générateurs

3.8.1. Générateurs ou sources de tension

La source de tension, ou générateur de tension, est un dipôle caractérisé par une tension constante entre ces bornes, quelque soit l'intensité variable qu'il débite. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser particulièrement aux générateurs de tension continue. Ce type de générateur est caractérisé par une force électromotrice e , et une faible résistance intérieure (r) (figure 3.7).

Il est possible de remplacer un générateur de tension, dont les caractéristiques sont (e, r) par une source idéale, de force électromotrice e , montée en série avec le conducteur ohmique, de résistance r comme indiqué sur la figure (3-7).

La force électromotrice d'un générateur de tension est égale à la différence de potentiel entre ses bornes quand il ne débite aucun courant : $I = 0 \Leftrightarrow e = V_{AB}$ (3-17)

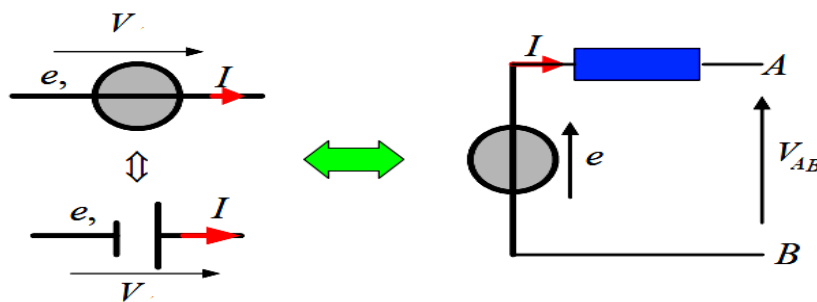


Figure (3.7): Représentation du générateur de tension

3.8.2. Générateurs ou sources de courant

La source de courant, ou générateur de courant, est un dipôle caractérisé par le débit d'un courant constant, quelque soit la différence de potentiel variable entre ses bornes. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser essentiellement aux générateurs de courant continu. On représente ce type de générateurs par le schéma de la figure (3.8).

On peut remplacer un générateur de courant par une source de courant idéale, qui débite un courant constant, et montée en parallèle avec un conducteur ohmique, de résistance, comme indiqué sur la figure (3.8). $I = I_0 - \frac{u}{r}$ (3-18)

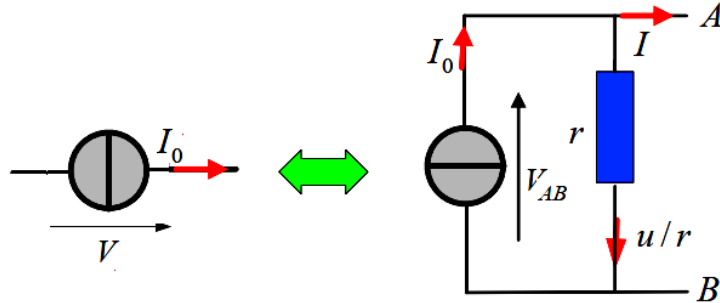


Figure (3.8) : Représentation du générateur de Courant

3.9. Les lois régissant les circuits électriques

3.9.1. Equation du circuit électrique

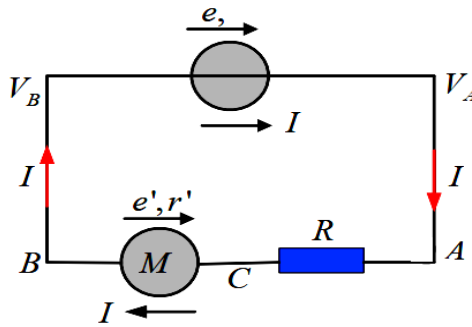
Soit le circuit représenté sur la figure (3.10), composé d'un générateur (de force électromotrice e et de résistance interne r), d'une résistance externe R , et d'un moteur M (de force contre électromotrice e' et de résistance interne r').

Le générateur produit une puissance électrique : $P = e I$.

Le conducteur Ohmique (R) transforme l'énergie électrique en énergie calorifique, dont la valeur est $R I^2$.

La résistance interne du générateur consomme à son tour une puissance de valeur $r I^2$ (C'est ce qui explique l'échauffement du générateur).

Le moteur M (ou un récepteur ou même un générateur monté en opposition, à condition que $e < e'$), consomme, quant à lui, une puissance ($e' I$), qu'il la transforme en énergie mécanique, sa résistance interne consomme une puissance égale à $r' I^2$ (à cause de la présence d'un conducteur ohmique à l'intérieur du moteur, d'où son échauffement).



Figure(3.10) : circuit fermé

D'après le principe de la conservation de l'énergie : l'énergie produite est égale à l'énergie consommée : $e \cdot I = e' I + R I^2 + r I^2 + r' I^2$

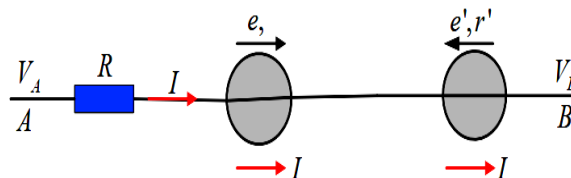
D'où, l'intensité du courant qui parcourt le circuit : $I = \frac{e - e'}{R + r + r'}$

L'intensité du courant électrique dans le circuit électrique est égale à la somme algébrique des forces électromotrices divisée par la somme de toutes les résistances. Cette relation est appelée : équation du circuit électrique.

Dans le **cas général**, si on note par (r) les résistances internes et par R les résistances externes, on a : $I = \frac{\sum e}{\sum r + \sum R}$ (3-19)

3.10. Différence de potentiel entre deux points d'un circuit (ou loi généralisée d'Ohm)

La figure (3.11) représente une portion de circuit électrique parcourue par un courant d'intensité I, que débite une source (non représentée sur la figure), et qui approvisionne cette portion AB d'une puissance $P = VI$, où V représente la différence de potentiel entre les points A et B.



Figure(3.11) : différences de potentiel entre deux points

$R = \sum R_i$: désigne la résistance totale de la portion AB .

$e = \sum e_i$: désigne la somme algébrique de toutes les forces électromotrices.

La puissance produite entre les points A et B est égale à : $V \cdot I + (\sum e_i) \cdot I$

Dans les résistances la puissance consommée est : $(\sum R_i) \cdot I^2$

Si on égalise les deux puissances produite et consommée, selon le principe de la conservation de l'énergie, on aura : $V \cdot I + (\sum e_i) \cdot I = (\sum R_i) \cdot I^2$

Finalement, on obtient la loi qu'on appelle :

loi d'Ohm généralisée : $V_A - V_B = V = (\sum R_i) \cdot I - (\sum e_i)$ (3-20)

Remarque:

1- Si on choisit le sens de A vers B comme étant positif, et si les courants et les forces électromotrices sont de même sens, leurs signes seront positifs, par contre s'ils sont de sens contraires, leurs signes sont négatifs.

2- Si le point A coïncide avec le point B , alors: $(\sum R) \cdot I - (\sum e) = 0$

3.11. différence de potentiel aux bornes d'un générateur de tension

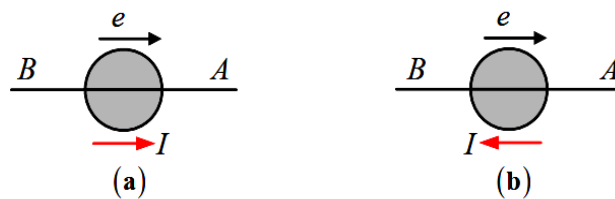


Figure (3.12) : différence de potentiel entre les bornes d'un générateur

La figure (3.12) représente un générateur de tension avec deux possibilités :

3.11a. Le sens du courant est le même que celui de la force électromotrice, c'est-à-dire que le courant sort par le pôle positif du générateur.

3.11b. Le sens du courant est contraire à celui de la force électromotrice, c'est-à-dire que le courant sort par le pôle négatif du générateur.

* On applique à la portion du circuit la relation générale: $V_{AB} = \sum R_i \cdot I - \sum e_i$, et on choisit le sens positif de A vers B .

la figure 3.14 (a) : e et I sont de sens contraires au sens positif choisi, ils sont donc négatifs, d'où: $V_{AB} = \sum R_i \cdot I - \sum e_i = -r \cdot I - (-e) = e - r \cdot I$ (3-21)

Cette dernière expression est la différence de potentiel entre les bornes d'un générateur.

* Sur la figure (3.12b) : (e) s'oppose au sens positif choisi, donc elle est négative ; tandis que I concorde avec le sens positif choisi, donc il est positif :

$$V_{AB} = \sum R_i \cdot I - \sum e_i = r \cdot I - (-e) = e + r \cdot I \quad (3-22)$$

3.12. Groupement de générateurs

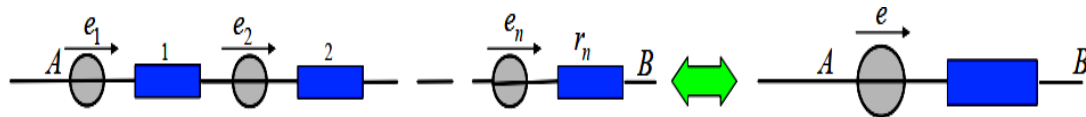
Un circuit électrique peut grouper plus d'un générateur.

3.12.1. Cas des générateurs de tension

Chaque générateur est caractérisé par une force électromotrice (e_i) et une résistance interne (r_i)

3.12.2. Association en série

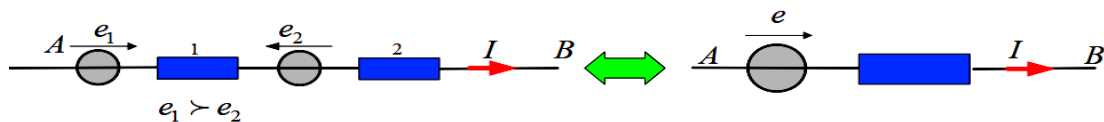
Dans ce cas, la force électromotrice du générateur équivalent est égale à la somme algébrique des forces électromotrices des générateurs associés, et sa résistance interne est égale à la somme arithmétique de toutes les résistances internes.



Figure(3.13) : Groupement de Générateurs de tension en séries

$$r = \sum r_i, e = \sum e_i \quad (3-23)$$

3.12.3. Association en opposition



Figure(3.14) Groupement de Générateurs de tension en opposition

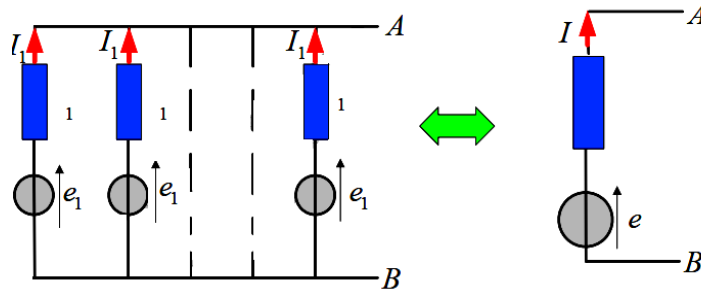
Le générateur de plus grande force électromotrice s'impose en tant que générateur. D'où :

$$e_1 > e_2 \Rightarrow e = e_1 - e_2 \quad (3-24)$$

$$r = r_1 + r_2 \quad (3-25)$$

3.12.4. Association en séries : Figure (3. 15)

Il est interdit de monter en dérivation deux générateurs de différentes tensions. Les sources de tensions montées en parallèle doivent obligatoirement être toutes semblables.



Figure(3.15) : groupement de générateurs de tension en dérivation

Dans ce cas, la force électromotrice du générateur équivalent est égale à la force électromotrice d'un générateur du groupement, et l'inverse de la résistance équivalente est égal à la somme des inverses des résistances internes.

$$I = n. I_1 \quad , \quad e = e_1 \quad , \quad \frac{1}{r} = \sum_i \frac{1}{r_i} = \frac{n}{r_i} \quad (3-26)$$

3.12.5. Cas des générateurs de courant

3.12.6. Groupement en parallèle : Figure (3.16)

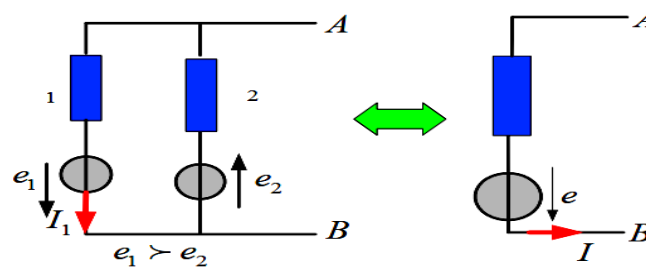


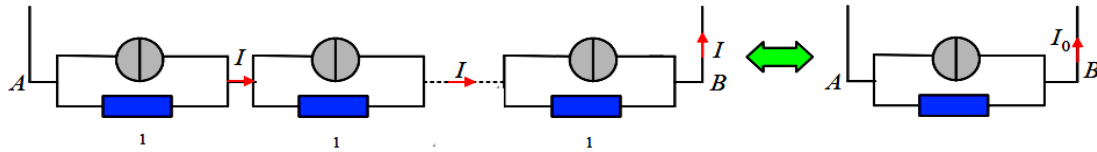
Figure (3.16) : groupement de générateurs de courant en parallèle

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n \quad (3-26)$$

3.12.7. Association en série : Figure (3.17)

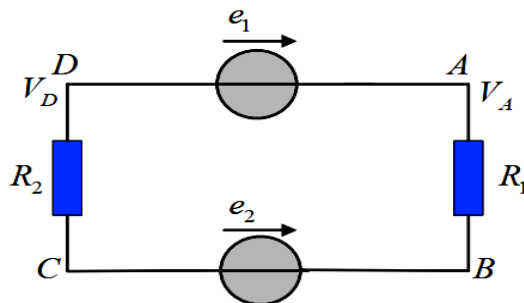
Il est interdit de monter en série des sources de courant débitant des intensités de courants différentes. Les générateurs de courant montés en parallèle doivent obligatoirement être tous semblables.



Figure(3.17) : groupement de générateurs de courant en séries

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n}, I_0 = I, V_A - V_B = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \quad (3-27)$$

Exemple: Considérons le circuit représenté sur la figure au dessous.



Avec les valeurs suivantes :

$$V_1 = 12 \text{ v}, r_1 = 0,2 \, \Omega, e_2 = 6 \text{ v}, r_2 = 0,1 \, \Omega, R_1 = 1,4 \, \Omega, R_2 = 2,3 \, \Omega$$

Trouver :

- 1/ Le sens et l'intensité du courant dans le circuit électrique,
- 2/ La différence de potentiel entre les points A et C .

Solution

1/ Puisque: $e_1 > e_2$, on en déduit que le sens du courant est celui des aiguilles d'une montre. Puisque le deuxième générateur est monté en opposition avec le premier générateur, sa force électromotrice est négative.

On calcule l'intensité en utilisant la relation : $I = \frac{\sum e}{\sum R + \sum R}$

$$I = \frac{12 - 6}{0,1 + 0,2 + 1,4 + 2,3} = 1,5 \text{ A}$$

2/ Pour trouver la différence de potentiel entre les points A et C , on utilise la relation :

$$V_A - V_B = V_{AC} = (\sum R_i).I - \sum e_i$$

Pour ce faire, on choisit l'un des chemins ABC ou ADC :

- Suivant le trajet ABC : $V_A - V_B = V_{AC} = (0,1 + 1,4). 1,5 - (-6) = 8,25 \text{ v}$

- Suivant le trajet ADC : $V_A - V_B = V_{AC} = (0,2 + 2,3). (-1,5) - (-6) = 8,25 \text{ v}.$

3.13. Définition d'un réseau électrique

f On appelle réseau électrique, tout circuit électrique complexe constitué d'éléments passifs (résistances) et d'éléments actifs (**f. e. m** et **f. c. e. m**),

* **Exemple du réseau électrique** :figure (3.18).

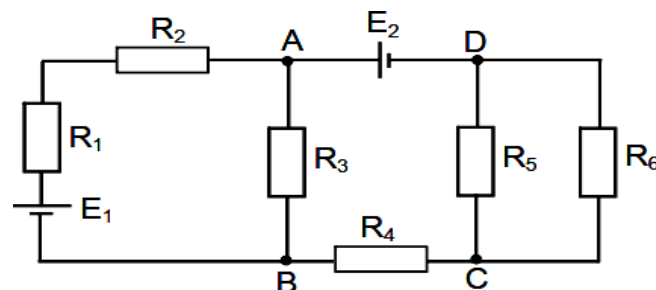


Figure (3.18): réseau électrique

3.13.1 . Nœuds - Branches - Mailles

3.13.1.a. Nœud Un nœud est un **point** d'un circuit où trois fils ou plus se rencontrent. En un nœud d'un circuit, la somme des intensités entrant est égale à la somme des intensités sortant figure(3.19).

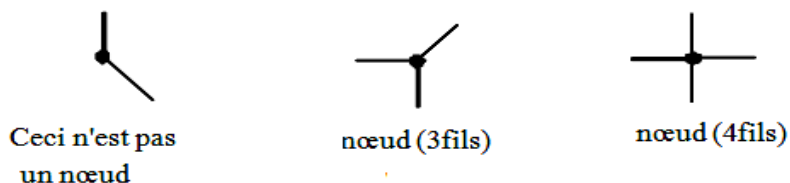


Figure (3.19): Lois des nœuds

Exemple2 Figure (3.18) : Nœuds : A , B , C , D

3.13.1.b. Branches

On appelle d'un réseau électrique, une partie du circuit électrique comprise entre deux Nœuds,

Exemple (Figure (3.18)): Branches : $AR_2R_1E_1B$; $AE_2DR_5CR_4B$; DR_6CR_5

3.13.1.c. Maille

On appelle maille tout ensemble de branches qui forment une boucle fermée (circuit),

Exemple : (Figure (3.18)): Maille 1 - $AR_2R_1E_1BR_3CR_6DE_2A$

Maille 2 - $AE_2DR_5CR_4BR_3A$

3.13.1.d. Dipôle: Tout ensemble d'éléments électriques situés entre deux nœuds.

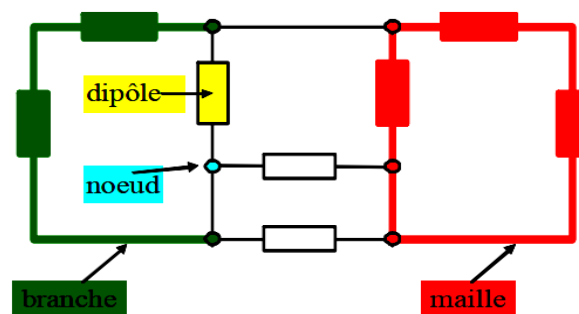


Figure (3.20): Lois des nœuds

3.14. Résolution d'un réseau électrique

Résoudre un réseau électrique consiste à déterminer les intensités de courant dans les différentes branches lorsque toutes les **f.e.m** , **f.c.e.m** et résistances sont connues,

3.15. Méthode de résolution d'un réseau électrique

On peut résoudre un réseau électrique par l'une des méthodes suivantes :

- Méthode de Kirchoff,
- Méthode de superposition,
- Méthode de Thévenin,
- Méthode de Norton,
- Méthode de Millmann,

3.16. Les lois de Kirchhoff

En 1845, le physicien allemand Gustav Robert Kirchhoff applique la conservation de la charge et la conservation de l'énergie à un circuit électrique. Il en retire deux lois

fondamentales sur l'analyse des circuits électriques qui portent le nom de loi des nœuds de Kirchhoff et loi des mailles de Kirchhoff.

$$\sum_{\text{lois des nœuds}} I = 0, \sum_{\text{lois des mailles}} \Delta V = 0$$

où

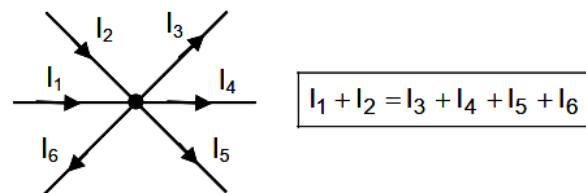
I : Courant entrant ou sortant à un nœud d'un circuit en ampère (A).

V : Variation de potentiel produit par un composant électrique d'un circuit en volt (v)

3.16.2 . La loi des Nœuds

La somme des courants qui rentrent à un nœud est égale à la somme des courants qui sortent,

Exemple :



Figure(3.21): Lois des nœuds

3.16.2 .a. Conventions sur le courant

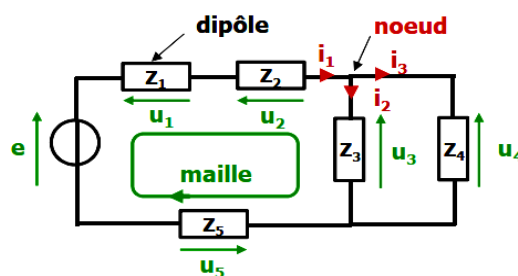
- 1-Un courant entrant sur un nœud est un courant positif ($I > 0$).
- 2-Un courant sortant d'un nœud est un courant négatif ($0 < I$).
- 3- Le **courant** est **constant** sur une **branche** et change à la rencontre d'un nœud.

3.16.3. La loi des mailles

3.16.3.a. Convention sur une maille

La somme des tensions (avec un signe $+/-$ « algébrique ») dans une maille est nulle.

$$\sum \pm u_k = 0$$



Figure(3.22):Lois des mailles

3.16.4. Règles d'application

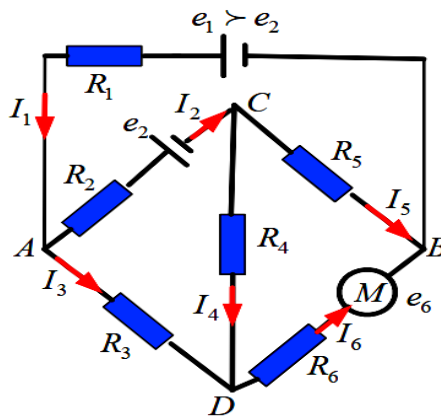
1- Un sens de rotation arbitraire de la maille est fixé.

2- On met un signe + devant les tensions dont les flèches suivent le sens de rotation, et un signe – si les flèches sont en sens inverse

Exemple1 : $e - u_1 - u_2 - u_3 - u_5 = 0$

Exemple2:

La figure au dessous représente un circuit électrique fermé. On se propose d'appliquer les deux lois de Kirchhoff en écrivant toutes les équations correspondantes. Les résistances internes des générateurs et du moteur sont négligeables.



Solution:

Application de la première loi des nœuds

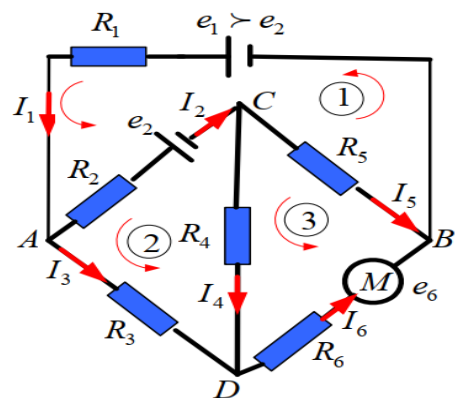
Il y a quatre nœuds auxquels correspondent quatre équations :

Au nœud A : $I_1 = I_2 + I_3$

Au nœud B : $I_1 = I_5 + I_6$

Au nœud C : $I_2 = I_5 + I_4$

Au nœud D : $I_6 = I_4 + I_3$



Application de la deuxième loi des Mailles: Il y a trois mailles indépendantes.

Après le choix des sens comme indiqué, on peut écrire les différentes équations:

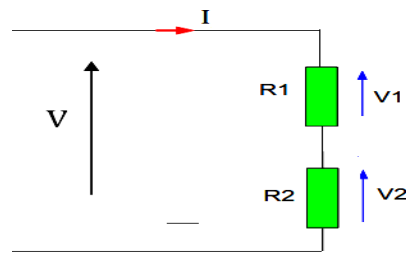
Mailles 1 : $e_1 - e_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5$

Mailles 2 : $e_2 = R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_2 I_2$

Mailles 3 : $e_6 = R_6 I_6 + R_4 I_4 - R_5 I_5$

3.17. Pont diviseur de tension

Deux Résistances en série aux bornes desquels on connaît la tension V , et parcourus par le même courant I :



Figure(3.23): diviseur de tension

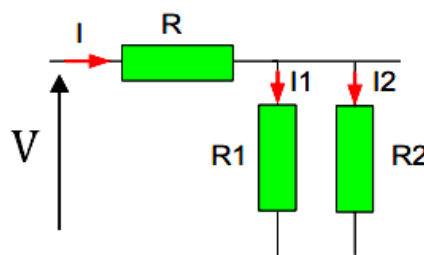
$$\begin{aligned} V &= (R_1 + R_2) \cdot I, & V_1 &= R_1 I, V_2 = R_2 I \\ V_2 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 \end{aligned} \quad (3-28)$$

Remarque :

Le pont diviseur de tension est très utilisé dans les applications !

3.18. Pont diviseur de courant

Deux Résistances en parallèle aux bornes desquels on connaît la tension V :



Figure(3.24): diviseur de Courant

$$\begin{aligned} V &= R_1 I_1 = R_2 I_2, & I &= I_1 + I_2, & I_1 &= I - I_2, & I_1 &= \frac{V}{R_1}, & I_2 &= \frac{V}{R_2} \\ \left. \begin{aligned} I_1 &= I - I_2 \\ R_1 I_1 &= R_2 I_2 \end{aligned} \right| &\Rightarrow R_1(I - I_2) = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (3-29)$$

3.19. Le théorème de Thévenin

Un circuit électrique plus ou moins complexe (composé de sources de tension ou de courant et de résistors) et possédant deux bornes A et B entre lesquelles est raccordée une charge R_C : peut être remplacé par:

- une source de tension de Thévenin « E_{Th} » dont la tension est calculée entre ses bornes A et B lorsque la charge « R_C » est déconnectée (tension à vide).
- un résistor de Thévenin « R_{Th} » dont sa valeur de résistance calculée, entre ses bornes A et B lorsque la charge est déconnectée et que les sources sont éteintes: en respectant les deux règles ci-dessous:

→ les sources de tension (indépendantes) sont remplacées par un court-circuit

→ les sources de courant (indépendantes) par un circuit ouvert.

3.20. Application 1: montage avec une source de tension

On désire simplifier le montage suivant en utilisant le théorème de Thévenin figure (3.25).

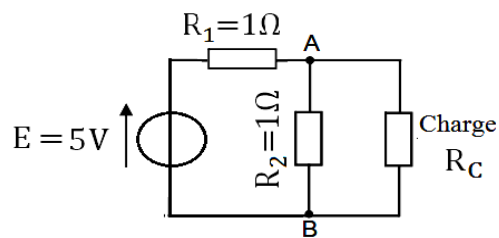


Figure (3.25)

- Je déconnecte la résistance de charge « R_C ». Je calcule la tension E_{Th} qui est la tension V_{AB} à vide figure (3.26)

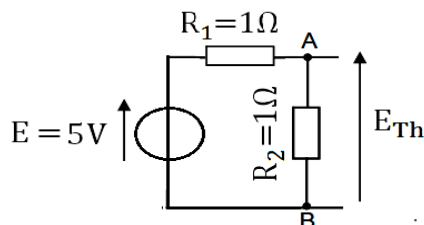


Figure (3.26)

- En appliquant la formule du pont diviseur de tension: $E_{Th} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2.5 \text{ v}$

Je calcule la résistance R_{Th} vue en les points « A » et « B » en remplaçant les sources de tension par un fil et en retirant les sources de courant (ici il n'y a pas de source de courant)
figure (3.27) :
$$R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 500 \Omega$$

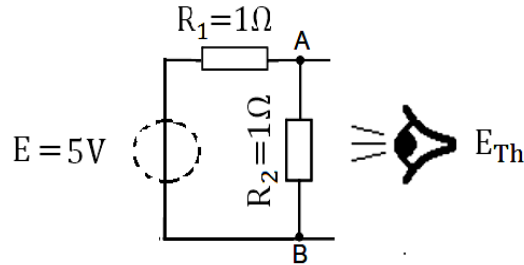


Figure (3.27)

- Le modèle équivalent de Thévenin est donc figure (3.28) :

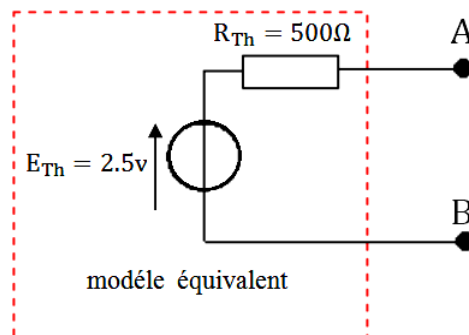


Figure (3.28)

- Je rajoute maintenant la charge « R_C » et j'obtiens le schéma équivalent suivant figure (3.29):

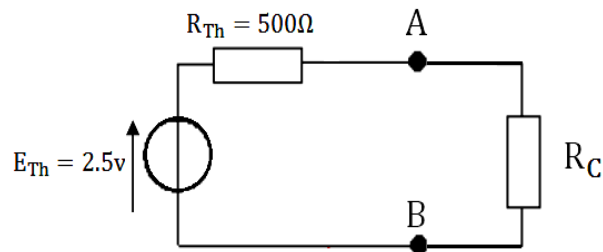


Figure (3.29)

- Je peux maintenant calculer facilement la tension V_{AB} aux bornes de la charge « R_C » puis le courant la traversant en appliquant la loi d'ohm.

Ici, si $R_C = 500 \Omega$, je trouve « $V_{AB} = 2,5V$ et $I_{R_C} = 5mA$ »

Application 2 : montage avec une source de courant figure (3.30) .

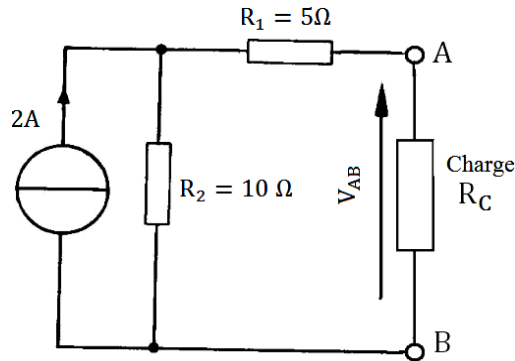


Figure (3.30)

- Je déconnecte la résistance de charge « R_C ». Je calcule la tension E_{Th} qui est la.
- Je déconnecte la résistance de charge « R_C ». Je calcule la tension E_{Th} qui est la tension V_{AB} à vide figure(3.31).

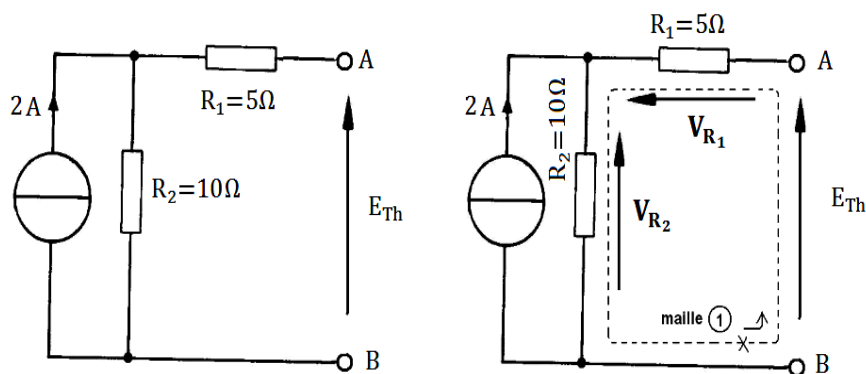


Figure (3.31)

L'équation de la maille « 1 » est donc la suivante:

$$E_{Th} + VR_1 - VR_2 = 0 \Rightarrow E_{Th} = VR_1 - VR_2$$

Or la maille est ouverte (le résistor R_C est retiré). Le courant « I_1 » traversant R_1 est donc nul: $I_1 = 0 A$.

En appliquant la loi d'ohm: $VR_1 = R_1 I_1 \Rightarrow E_{Th} = VR_2 - 0 = VR_2$. Il faut donc calculer VR_2 , figure(3.32).

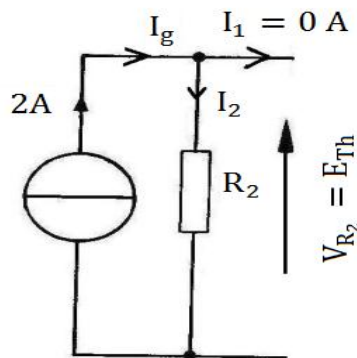


Figure (3.32)

En appliquant la loi des nœuds: $I_g = I_1 + I_2$

$$I_1 = 0 \text{ A} \Rightarrow I_g = 0 + I_2 = I_2 = 2 \text{ A}$$

(la source de courant fournit toujours un courant constant de +2 A)

$$\text{Donc: } E_{Th} = VR_2 = R_2 I_2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ v}$$

• Je calcule la résistance R_{Th} vue en les points « A » et « B » en remplaçant les sources de tension par un fil et en retirant les sources de courant (ici il n'y a pas de source de tension), figure(3.33):

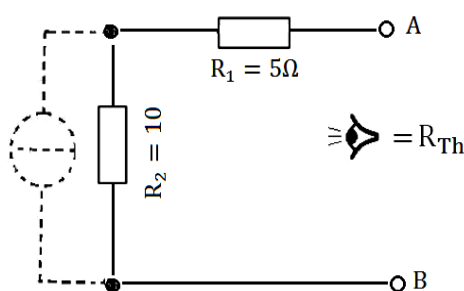


Figure (3.33)

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 15 \Omega$$

• Le modèle équivalent entre les points A et B est donc, figure(3.34):

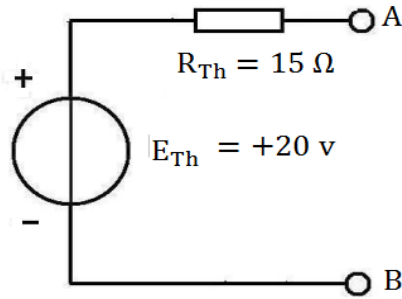


Figure (3.34)

3.21. Théorème de Norton

Tout circuit linéaire considéré de deux points quelconques du circuit, peut être remplacé par un générateur de courant I_N en parallèle avec une résistance R_N . $R_N = R_{Th}$ définie dans le théorème de Thévenin. I_N est l'intensité obtenue en court-circuitant les 2 points A et B, figure (3.35).

$$I_N = \frac{E}{R_{Th}} \quad (2-30)$$

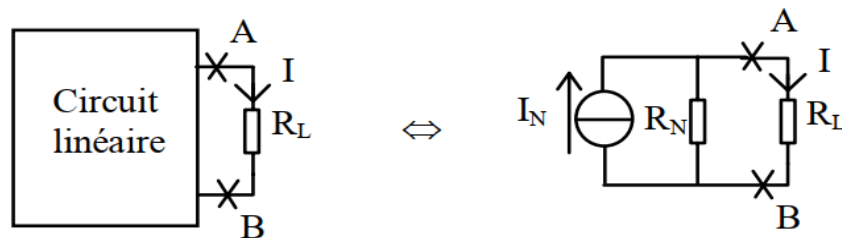


Figure (3.35) Théorème de Norton

3.22. Exemples d'application des théorèmes de Thévenin et Norton.

3.22.1. Théorème de Millman

Soient deux points A et B reliés par N branches, constituées d'un générateur E_i en série avec une résistance R_i :

$$V_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}} \quad (2-31)$$

Ce théorème est principalement utilisé dans les montages à Amplificateur Linéaire Intégré.

Exemple: figure(3.36)

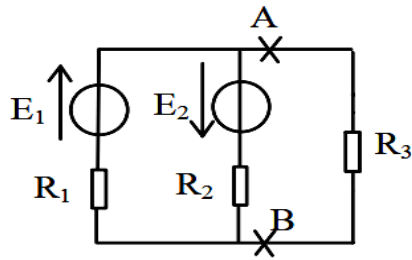


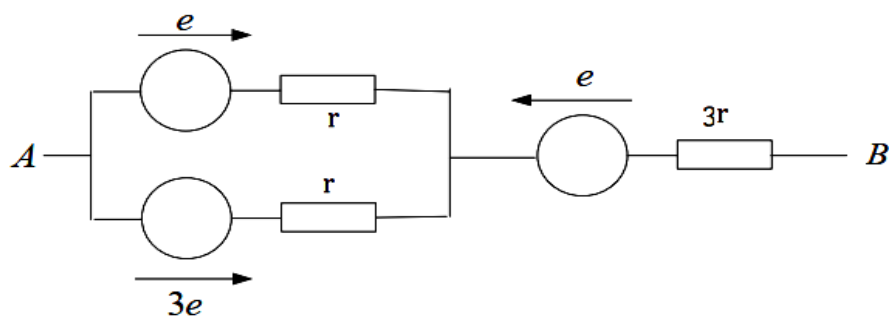
Figure (3.36)

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (2-32)$$

Exercices Corrigés

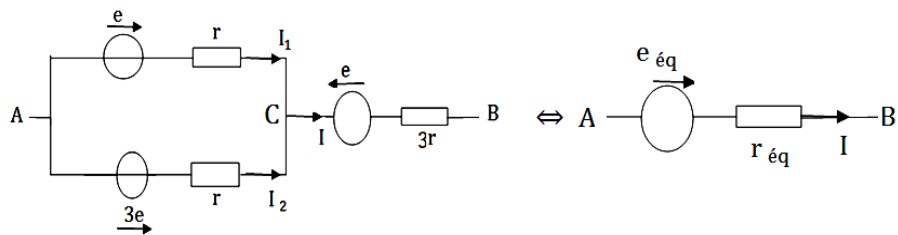
Exercice 01

Déterminer les paramètres du dipôle équivalent au groupement de générateur entre les points A et B .Préciser le sens



Solution

D'après la figure ci -dessous ,on voit que : $V_{AB} = V_{Ac} + V_{BC}$



Supposons que le courant va du point A vers le point B. On aura : $I = I_1 + I_2$

Le d.d.p. entre les points A et B en deux chemins différents.

$$V_{AB} = (rI_1 - e) + (3rI + e) \quad (1)$$

$$V_{AB} = (rI_2 - 3e) + (3rI + e) \quad (2)$$

$$(1) + (2) : 2 V_{AB} = r(I_1 + I_2) - 4e + 6rI + 2e = rI - 4e + 6rI + 2e = 7rI - 2e \quad (3)$$

Le d.d.p. entre les bornes du montage est : $V_{AB} = e_{\text{éq}} + r_{\text{éq}} I \quad (4)$

Par identification des équations (3), et (4) on obtient

$$e_{\text{éq}} = -1e, \quad r_{\text{éq}} = \frac{7}{2}r$$

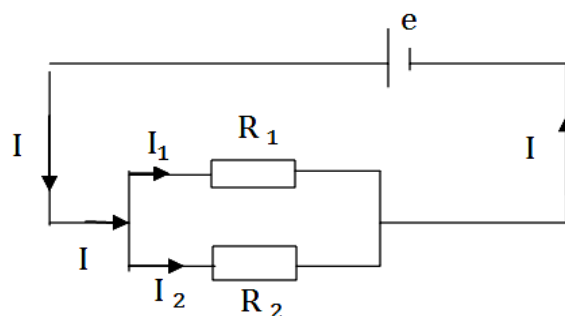
Vu le signe (-) de la **f.e.m.**, le sens réel du courant électrique va du point A vers le point B.

Exercice 02

Deux résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle avec un générateur idéal dont la tension entre ses bornes est V . Montrer que les intensités du courant qui traversent ces résistances

sont respectivement : $I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, et $I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

Solution



D'après la figure l'intensité du courant (I) que le générateur (e) délivre, se répartit entre R_1 et R_2 .

On a : $I = I_1 + I_2$, tel que : $e = R_1 I_1 = R_2 I_2$, et puisque : $I = I_1 + I_2$, on peut calculer chacune des deux intensités dans chacune des branches.

$$I_1 = I - I_2, \quad I_1 = \frac{e}{R_1}, \quad I_2 = \frac{e}{R_2}$$

$$R_1(I - I_2) = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_2 = I - I_1 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{array} \right| \Rightarrow R_2(I - I_1) = R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Exercice 03

On considère trois résistances $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 120 \Omega$ et $R_3 = 40 \Omega$ et un générateur de f.e.m $e = 120$ volts.

1/ On monte les trois résistances et le générateur comme le montre la figure ci-contre. Trouver les courants circulant dans les trois résistances ainsi que celui débité par le générateur.

2/ On assemble maintenant les trois résistances et le générateur comme le montre la figure ci-contre. Calculer les courants I_1 , I_2 , et I_3 qui traversent les résistances R_1 , R_2 et R_3 .

Solution

1/ Calcul des courants circulant dans les trois résistances et celui débité par le générateur :

Courant traversant R_1 : $I_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1} = 0 \text{ A}$

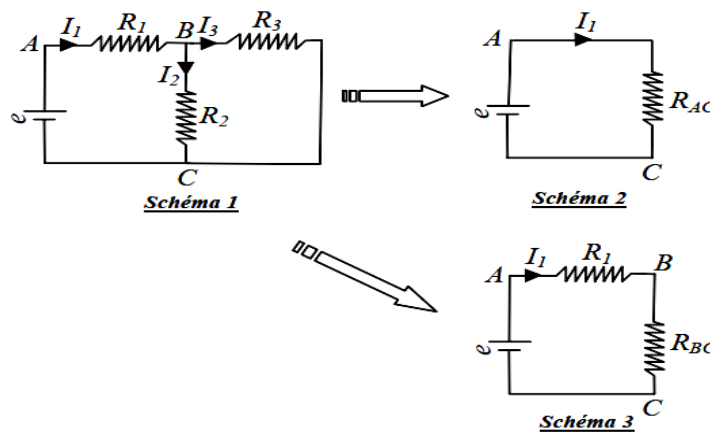
Courant traversant R_2 : $I_2 = \frac{V_A - V_C}{R_2} = \frac{e}{R_2} = 1 \text{ A}$

Courant traversant 3 : $I_3 = \frac{V_B - V_C}{R_3} = \frac{e}{R_3} = 3 \text{ A}$

Courant débité par le générateur

Au nœud C, on a : $I_e = I_2 + I_3 = 4 \text{ A}$

2/ Calcul des courants I_1 , I_2 et I_3 : Le circuit peut être simplifié comme l'indique la figure ci-contre (Schéma 1 → Schéma 2)



On a : $R_{AC} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 60 \Omega$

$$e = R_{AC} I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{e}{R_{AC}} = 2 \text{ A}$$

On remplace R_2 et R_3 par la résistance équivalente et on obtient le Schéma 3: Avec :

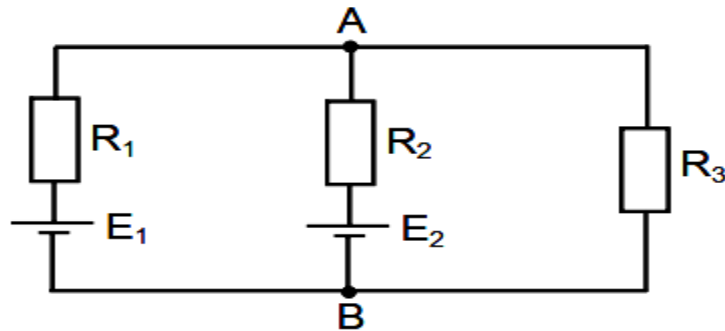
$$R_{BC} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 30 \Omega, \text{ D'où : } V_B - V_C = R_{BC} I_1 = 60 \text{ volts}$$

$$\text{Du Schéma 1, on'a : } V_B - V_C = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_B - V_C}{R_2} = 0,5 \text{ A}$$

$$\text{Loi des nœuds en B : } I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_3 = I_1 - I_2 = 1,5 \text{ A}$$

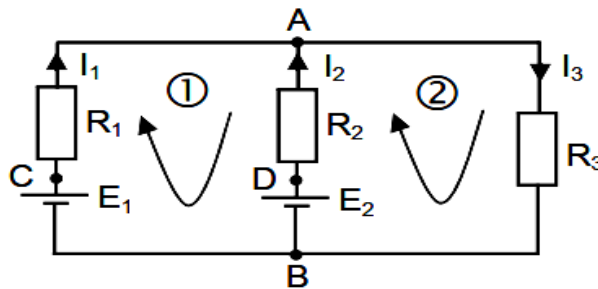
Exercice 04

Soit le circuit de la figure suivante, On se propose de déterminer les intensités de courants dans les trois branches. Sachant que : $R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 5 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $E_1 = 20 \text{ V}$; $E_2 = 70 \text{ V}$. Calculer les courants I_1, I_2 , et I_3



Solution

Le sens des courants étant inconnues, choisissons-les arbitrairement .



f- On 'a trois inconnues I_1, I_2 , et I_3 , il nous faut donc trois équations indépendantes,

$$\text{La loi des Nœuds : Au nœud A : } I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$$

La loi des mailles :

$$\begin{aligned} \text{1}^{\text{er}} \text{ maille - ADBCA : } R_1 I_1 - E_1 + E_2 - R_2 I_2 &= 0 \Rightarrow E_2 - E_1 = R_2 I_2 - R_1 I_1 \Rightarrow 5 I_2 - \\ 2 I_1 &= 50 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{2}^{\text{ème}} \text{ maille - ABDA : } R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_2 = 0 \Rightarrow E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \Rightarrow 5 I_2 + 10 I_3 = 70 \quad (3)$$

Regroupons les trois équations :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 & (1) \\ 5I_2 - 2I_1 = 50 & (2) \\ 5I_2 - 10I_3 = 70 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 & (1) \\ 5I_2 - 2I_1 = 50 & (2) \times 10 \\ 5I_2 - 10(I_1 + I_2) = 70 & (1) \rightarrow (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40 I_2 = 320 \Rightarrow I_2 = 8 \text{ A} \\ 25 \times 8 - 10I_1 = 250 \Rightarrow I_1 = -5 \text{ A} \\ 8 - 5 = I_3 = 3 \text{ A} \end{cases}$$

Remarque :

f Les courants I_3 et I_2 sont positifs, leur calcul est correct et leur sens choisi est bon,

f Le courant I_1 est négatif, le calcul est correct, le sens réel est le sens inverse,

Exercice 05

Un fil de tungstène de 1 mm de diamètre transporte un courant d'intensité 15 A . Déterminer le champ électrique à l'intérieur du fil sachant que la résistivité du tungstène est $5,5 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Solution

1- On connaît la relation entre la densité de courant , la conductivité et le champ électrique :

$$J = \sigma E, \text{ et puisque la densité de courant est : } J = \frac{I}{S}, \text{ donc: } E = \frac{I}{S \sigma}$$

La conductivité est égale à l'inverse de la résistivité, on peut donc écrire : $E = \rho \frac{I}{S} = \rho \frac{I}{\pi r^2}$

$$\text{A.N: } E = 5,5 \cdot 10^{-8} \frac{15}{3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 1,05 \text{ V m}^{-1}$$

Exercice 06

Le générateur de la figure ci-dessous a une force électromotrice $e = 9 \text{ v}$ et une résistance $r = 0,5 \Omega$.

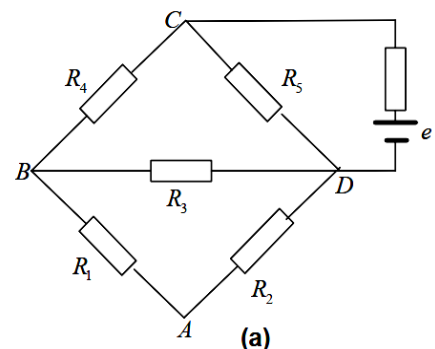
1/ Calculer l'intensité dans chaque résistance.

2/ Quelle est la puissance fournie par le générateur ?

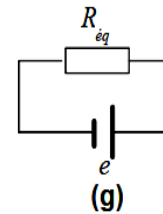
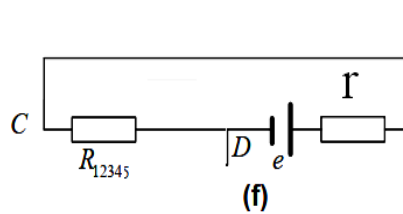
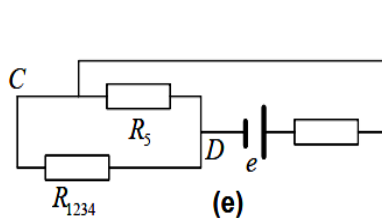
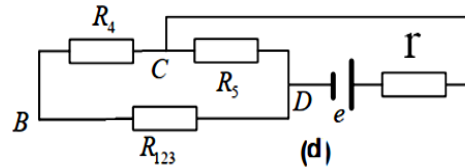
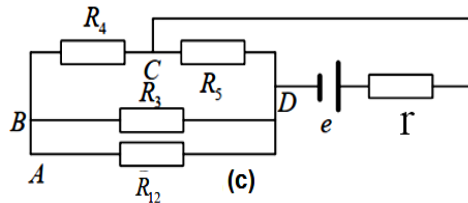
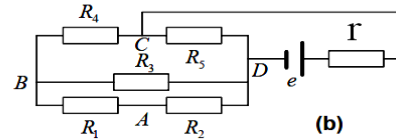
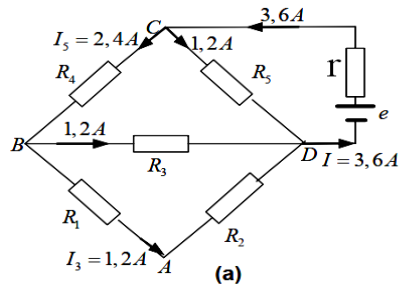
3/ Quelle est la différence de potentiel entre A et C ?

On donne: $R_1 = R_2 = R_4 = 1 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$

Solution



1/Tous les montages représentés ci-dessous sont équivalents au montage donné dans l'énoncé.



De la figure (b) , on en déduit la résistance équivalente des résistances R_1 et R_2 montées en série : $R_{12} = R_1 + R_2 = 2 \Omega$

De la figure(c) , on en déduit la résistance équivalente des résistances R_{12} et R_3 montées en parallèle : $\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{123} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12}+R_3} = 2 \Omega$

De la figure(d) , on en déduit la résistance équivalente des résistances R_{123} et R_4 montées en série : $R_{1234} = R_{123} + R_4 = 3 \Omega$.

De la figure(e) , on en déduit la résistance équivalente des résistances R_{1234} et R_5 montées en dérivation : $\frac{1}{R_{12345}} = \frac{1}{R_{1234}} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow R_{12345} = \frac{R_{1234} R_5}{R_{1234} + R_5} = 2 \Omega$

De la figure(f) , on en déduit la résistance équivalente de la résistance R_{12345} et r de la résistance interne du générateur montées en série : $R_{eq} = R_{12345} + r = 2,5 \Omega$

De la figure(g) , on peut à présent calculer l'intensité principale que débite le générateur dans le circuit : $I = \frac{e}{R_{eq}} = 3,6 \text{ A}$.

A partir de ce résultat, et de la figure (g) qui lui correspond, et, en passant par ordre par toutes les figures de (f) jusqu'à (a), on obtient les différentes intensités dans chaque branche du circuit :

Dans la figure (f) : $I = 3,6 \text{ A}$

Dans la figure (e) : $V_{CD} = R_5 I_5 = -r I + e \Rightarrow I_5 = \frac{r I + e}{R_5} = \frac{0,5 \cdot 3,6 + 9}{6} = 1,2 \text{ A}$ - Tandis que

dans la résistance R_{1234} , c'est-à-dire à travers R_{123} et R_4 , l'intensité est : $I_4 = I - I_5 = 2,4 \text{ A}$

Dans la figure (c) : l'intensité à travers R_{12} est égale à l'intensité à travers R_3 , puisque les deux résistances sont égales : $I_3 = \frac{2,4}{2} = 1,2 \text{ A}$.

2/ Dans la figure (a), on a représenté les valeurs et les sens des différentes intensités :

$$P = R_{\text{eq}} I^2 = e I = 32,4 \text{ W}$$

3/La différence de potentiel entre A et C : on peut la calculer en suivant n'importe quelle branche.

En suivant par exemple la branche ADeC, la différence de potentiel demandée est :

$$V_{AC} = R_2 I_3 + r I - e = (1 \cdot 1,2) + (0,5 \cdot 3) - 9 = -5 \text{ v}$$

Partie.2

Chapitre 1.Electromagnétisme

1. Magnétisme et définition du champ magnétique

1.1. Le magnétisme

Le mot « magnétisme » dérive du nom de la région qui porte le nom de « magnésie », située sur la côte ouest de l'actuelle Turquie, où le phénomène magnétique a été observé depuis fort longtemps (600 avant J.C). Cette région renfermait des gisements du minerai appelé « magnétite » qui a des propriétés spécifiques. L'électromagnétisme est une grande branche de la physique qui permet de donner l'explication de l'existence des ondes électromagnétiques : ondes radio ou la lumière. Elle permet aussi de comprendre les micro-ondes et le rayonnement gamma. Son domaine d'application est très large, ce qui traduit l'importance de cette branche. L'électromagnétisme est basé sur l'interaction électromagnétique qui est l'une des quatre interactions élémentaires responsables de tous les phénomènes de l'univers. Cette interaction unifiée avec l'interaction faible constituent la théorie électrofaible, dans le domaine de la physique des particules. L'électromagnétisme représente le domaine des sciences qui étudie les interactions mutuelles entre les charges électriques en mouvement relatif les unes des autres. Il est aussi lié à l'étude du champ électrique et du champ magnétique qui, en s'unifiant, constituent le champ électromagnétique. En bref, c'est la science qui étudie les phénomènes magnétiques dus aux interactions entre les courants électriques et les champs magnétiques. Avant d'entamer l'étude des éléments de l'électromagnétisme, un survol sur le magnétisme s'impose pour une bonne compréhension. On entend dire par le magnétisme, dans ce chapitre, le magnétisme physique, dit encore le magnétisme minéral. Il est loin du magnétisme animal ou vital, du magnétisme mental, du magnétisme humain ou du magnétisme spirituel, qui représentent une vue de l'esprit. Le magnétisme physique ou minéral est une branche de la physique basée sur une force mesurable, quantifiable et qui peut être mise en équation. C'est une force qui peut être reproductible à volonté et qui est considérée comme une force fondamentale de la nature, exactement comme celle l'électricité. Elle est dégagée des aimants permanents et elle est principale dans toute la technologie moderne.

1.2.Les aimants permanents

Un aimant permanent est un matériau générant naturellement un champ magnétique et a la particularité d'attirer certain métaux comme le fer, le nickel, le cobalt et le chrome.

On distingue deux types des aimants permanents :

1.2.a. Les aimants naturels : ce sont des matériaux dès l'origine aimantés.

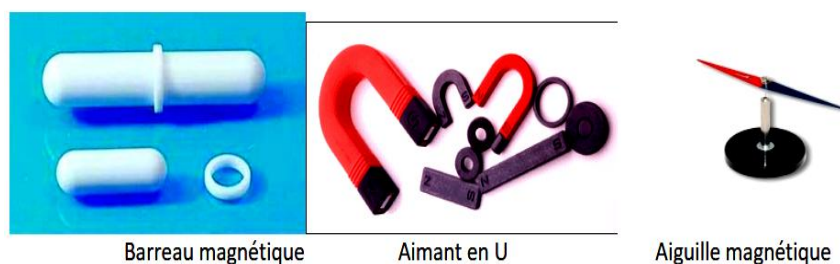
Exemple : La magnétite dont la formule chimique est Fe_3O_4 . C'est un oxyde qui peut être trouvé naturellement sous forme de cristaux au sein de roches éruptives. On trouve des traces de magnésium Mg, de zinc Zn, de manganèse Mn, de nickel Ni, de chrome Cr, de titane Ti, de vanadium V et d'aluminium Al dans la magnétite.



Figure(1 . 1) :La magnétite – Fe_2O_3

1.2. b. Les aimants artificiels : ce sont des matériaux qui ne prennent leurs propriétés magnétiques qu'après un traitement préalable. Ils sont constitués d'une matière ferromagnétique (on en parlera dans les sections qui suivent).

▪ **Exemple :** Parmi les aimants artificiels on trouve : le barreau magnétique utilisé comme agitateur, l'aimant très connu en U et l'aiguille magnétique. Ces trois exemples sont montrés sur la figure(4 .2).



Figure(1.2): Aimants artificiels

1.3. Les aimants non permanents

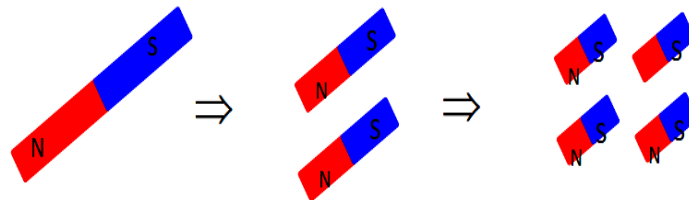
Ce sont des matériaux dont le magnétisme est provoqué ou induit. Les détails seront exposés dans les sections de l'électromagnétisme.

Exemple : En alimentant en courant électrique un fil bobiné, on obtient un électroaimant (figure ci-contre).

Remarque : les aimants permanents perdent leur aimantation . A titre d'exemple la magnétite perd son aimantation à 580°C. On appelle cette température : le point de Curie.

1.5. Les dipôles magnétiques

Chaque aimant possède toujours deux pôles : un Nord et l'autre Sud. En divisant un aimant on obtient deux aimants, chacun d'eux possède deux pôles : nord et sud. Dans la figure (1.3), le pôle Nord est représenté en rouge et le pôle sud en bleu, par convention.



Figure(1.3) :En subdivisant les aimants, les nouveaux petits aimants gardent toujours la polarité : Nord-Sud

1.6. Attraction et répulsion des aimants

En approchant les aimants l'un de l'autre, on constate soit une attraction soit une répulsion. Ce sont les forces magnétiques. En rapprochant face à face le même pôle des deux aimants on constate une répulsion. Au contraire, en rapprochant face à face deux pôles différents des deux aimants, on constate une attraction. La figure (1.4) récapitule ces phénomènes.

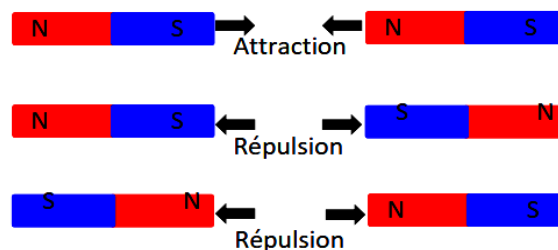


Figure (1.4): Répulsion et attraction entre aimants

- **Remarque :** Dans le cadre de l'électromagnétisme l'existence du monopôle magnétique est exclue. Cependant, Paul Dirac a démontré son existence théorique en physique quantique et en septembre 2009 les chercheurs du domaine ont observé des quasi-particules artificielles avec des propriétés d'un monopôle magnétique.

1.7. Origine du magnétisme

L'origine du magnétisme d'un matériau vient de ses constituants fondamentaux : les électrons et les atomes. En plus de sa propriété fondamentale qu'il porte une charge électrique, l'électron possède une autre propriété aussi fondamentale que la charge : il se comporte exactement comme un petit aimant. On dit qu'il possède un moment dipolaire magnétique (on en verra la définition plus tard). Ce comportement bipolaire trouve son origine dans une propriété plus fondamentale de l'électron : le spin. Cette propriété est expliquée dans le cadre d'une théorie de la physique moderne dite: Théorie Quantique . Par analogie avec la mécanique classique , le spin peut être considéré comme une rotation rapide sur lui-même. D'ailleurs, le mot « spin », signifie en anglais « tourner rapidement ». Ce mouvement de rotation de la charge sur lui - même crée le champ magnétique intrinsèque de l'électron : le spin. Le spin des électrons est la source principale de l'aimantation des aimants. L'autre cause secondaire est la contribution de son moment angulaire orbital dû à son mouvement autour du noyau. La répartition de tous les dipôles magnétiques dans une matière et leurs comportement vis - à - vis d'un champ magnétique extérieur attribue à tout matériau l'état magnétique correspondant : Ferromagnétique, paramagnétique, ...

Dans certains matériaux les dipôles magnétiques s'orientent dans une même direction donnant un champ magnétique résultant plus grand. On dit qu'ils sont aimantés . Dans de tels matériaux il y a des couches électroniques superficielles des atomes constituants, partiellement remplies. Parce que le spin d'un électron ne se trouve que, selon la direction de son champ magnétique, dans deux états : up ou down. Et comme les électrons se répartissent d'une manière appariée, le spin des couches totalement remplies se compense et se termine par avoir une valeur nulle. En plus, les spins des électrons des couches partiellement remplies s'orientent dans la même direction, ce qui augmente le moment dipolaire total.

1.8. Définition du champ magnétique

1.8.1. Définition

Le champ magnétique est un champ de force résultant du déplacement des charges. C'est une grandeur vectorielle qui permet de caractériser qualitativement les effets magnétiques des courants électriques ou des matériaux magnétiques tels que les aimants permanents . Par comparaison avec le champ électrique, une charge ou un ensemble de charges en mouvement, créent dans la région où elles se trouvent un champ magnétique. Ce champ magnétique agit sur une charge électrique externe q avec une force $\vec{F}_B$. Il en est de même pour un courant électrique , puisque par définition , c'est un mouvement de charges. Comme le champ

électrique $\vec{E}$, le champ magnétique est lui aussi une grandeur vectorielle, on le note par le vecteur $\vec{B}$. Son nom complet est : champ d'induction magnétique.

1.9. Principe de superposition de champs magnétiques

Une propriété importante du champ magnétique est qu'il vérifie le principe de superposition, duquel on peut dire que : le champ magnétique résultant d'un ensemble n de champs magnétiques agissant simultanément est la somme vectorielle de tous les champs agissant :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots + \vec{B}_n \quad (1-1)$$

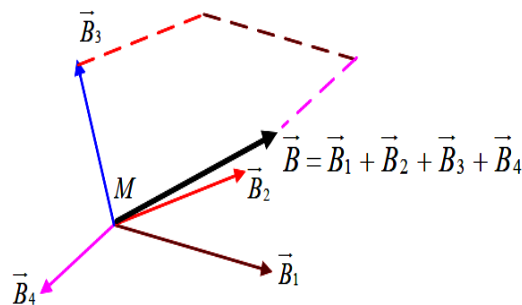


Figure (1.5): Composition des Champs Magnétiques

1.10. Force électromagnétique agissant sur une charge électrique en mouvement

1.10.1. La force de Lorentz (Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928) :

Le champ magnétique $\vec{B}$ est défini par la force magnétique $\vec{F}_B$, à laquelle une charge électrique q qui se déplace à une vitesse $\vec{v}$, est soumise lorsqu'elle y est plongée. Son expression est donnée par :

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1-2)$$

$$\text{Ou par son module : } F_B = |q| v B \sin(\theta) \quad (1-3)$$

Avec θ est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

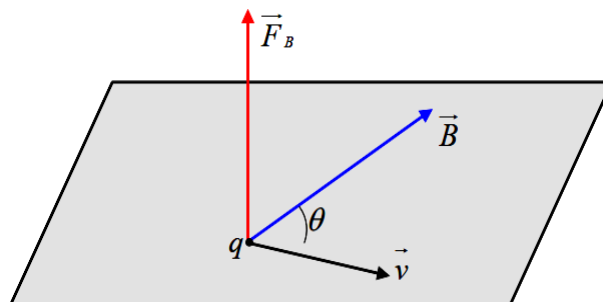


Figure (1.6): Force magnétique appliquée sur une charge mobile dans un champ magnétique

Quand une charge se déplace dans une région de l'espace, où règnent un champ magnétique et un champ électrique, la résultante est égale à la somme des deux forces : électrique et magnétique : $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_B = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ (1-4)

1.10 .2.Unité du champ magnétique

Dans le système international (SI), l'unité du champ magnétique est le Tesla. Il est noté par T. Cependant, l'utilisation d'autres unités peuvent être plus pratiques comme : le Gauss, notée (G) et l'Oersted, notée (Oe).

L'unité de base est : $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$,et $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$

1.10.3. La loi de Laplace

(Force agissant sur un fil parcouru d'un courant dans un champ magnétique uniforme)

La loi de Laplace traduit l'interaction entre un fil conducteur parcouru d'un courant électrique I , placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. En fait, cette loi peut être considérée comme une application de la loi de Lorentz sur le conducteur à cause des charges en mouvement dans ce conducteur. Ce fil subit une force électromagnétique $\vec{F}$ dont le sens donné par règle des trois doigts de la main droite (voir figure (1.7)).

-La densité de courant électrique qui parcourt un fil est : $\vec{J} = nq\vec{V}$

-La relation entre le courant et la densité est : $I = J S$

-Si un fil se trouve dans un champ magnétique, la force magnétique appliquée à l'unité de

volume est : $\vec{f} = n q \vec{V} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{f} = \vec{J} \wedge \vec{B}$ (1-5)

- Quant à la force appliquée à un volume élémentaire du fil elle est égale à :

$$d\vec{F} = \vec{f} dV = (\vec{J} \wedge \vec{B})dV \quad (1-6)$$

-Si S est la section du fil, et dl la longueur élémentaire considérée, on aura

$$d\vec{F} = \vec{f} dV = (\vec{J} \wedge \vec{B})S dl \quad (1-7)$$

Puisque $\vec{J} = J \cdot \vec{u}_T$ cela veut dire que $\vec{u}_T$ et $\vec{B}$ sont constants, ce qui nous permet d'écrire :

$$\vec{F} = I \vec{u}_T \wedge \vec{B} \int dl \quad (1-8)$$

- Si la longueur du fil baignant dans le champ magnétique est : $\int dl = l$

$$\vec{F} = I l \vec{u}_T \wedge \vec{B} \quad (1-9)$$

Puisque $\|\vec{u}_T\| = 1$,et si est α l'angle compris entre le fil rectiligne et le vecteur champ

magnétique, on obtient : $F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha$ (1-10)

Cette relation exprime la loi de Laplace Pour un fil rectiligne de longueur (L) et d'angle (θ) entre la direction de (L) et le champ magnétique $\vec{B}$.

* Pour déterminer la direction et le sens de cette force, on doit utiliser la règle connue de la main droite : l'index indique la force magnétique, le pouce le courant ou le conducteur, et le majeur le vecteur champ magnétique. Figure (1.7).

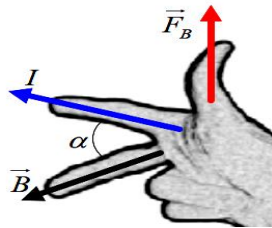
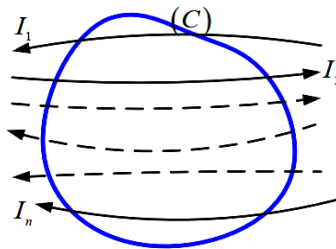


Figure (1.7): Règle de la main droite

1.10.4. La règle d'Ampère

La figure (1.8), représente plusieurs courants électriques passant à travers la courbe fermée (C)



Figure(1.8): Courants à travers une courbe fermée

La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée qui embrasse les courants $I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$, est égale au produit de la permittivité magnétique dans le vide μ_0 par la somme algébrique des intensités de courants embrassés par le contour (C).

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m A}^{-2} \text{ s}^{-2}$, ou encore $4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.

Valeur : $1,256 \text{ 6...} \times 10^{-6} \text{ kg m A}^{-2} \text{ s}^{-2} = 1,256 \dots$

Unités SI : Tesla. mètre par ampère

$$A_B = \oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i \quad (1-11)$$

Exemple

Un courant électrique traverse un conducteur cylindrique de longueur infinie et de rayon R.

La densité de courant $\vec{J}$ est constante à travers toute la section du cylindre et parallèle à l'axe

oz . On considère I_0 l'intensité totale qui traverse le cylindre.

Calculer le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Représenter graphiquement ses variation .

Solution

Considérons un cercle de rayon (r) entourant le cylindre. Le plan du cercle est perpendiculaire au cylindre (figure 1.9a). La section S_0 du cylindre est traversée par des courants d'intensité totale I_0 . La circulation de l'induction du champ magnétique suivant la trajectoire fermée (C) est donc égale à : $A_B = \oint_C \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi \cdot r$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

Cette expression représente l'intensité du champ magnétique à l'extérieur du cylindre, et qui résulte du passage de courant électrique dans le cylindre. Comme on peut le voir, ce champ est inversement proportionnel à la distance r ($R < r$) .

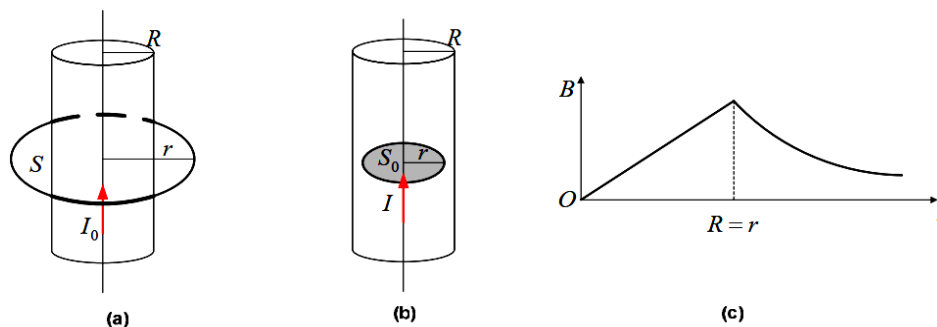
-Quant à l'intérieur du cylindre ($r < R$) , le courant qui passe à travers le cercle (figure 1.9 b) est I :

$$J = \frac{I_0}{S_0} = \frac{I}{S} \Rightarrow I = \frac{I_0}{S_0} S, S_0 = \pi R^2, S = \pi r^2$$

La circulation est donc égale à : $A_B = \oint_C \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ (1-12)

$$\mu_0 I = \mu_0 I_0 \frac{S}{S_0} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} r$$

Dans ce cas, l'intensité du champ magnétique en un point quelconque à l'intérieur du cylindre est proportionnelle à la distance séparant l'axe du cylindre du point considéré. La figure (1.9c) représente les variations de l'intensité du champ magnétique en fonction de la distance .



figure(1.9) :Application de la règle d'ampère

1.10.5. La loi de Biot et Savard

La loi de Biot-Savart, datant de 1820, établit la relation entre le champ magnétique et le courant électrique continu qui le crée. Considère un conducteur filiforme = longueur $\gg$ dimension transversale.

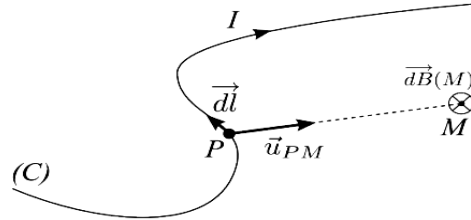


Figure (1.10): Élément de fil conducteur $d\vec{l}$ parcouru par un courant I et produisant un champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .

Soit un fil conducteur décrivant une courbe (C) . Ce fil est parcouru par un courant d'intensité I . On considère en un point P une portion élémentaire de fil $d\vec{l}$ orientée. Si on note $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ le vecteur position d'un point M relativement à P , le champ magnétique élémentaire créé en M est alors donné par:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \quad (1-13)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide

$\vec{u}_r$ représente le vecteur unitaire suivant la direction du vecteur position $\vec{r}$.

Le sens de $d\vec{B}$ est déterminé par la règle de la vis ou celle de la main droite

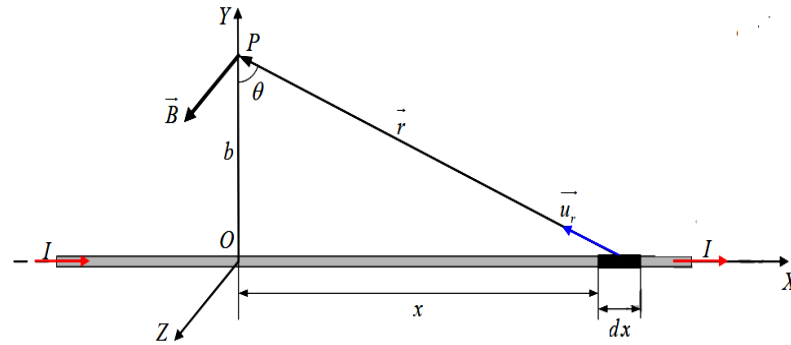
- Si on veut calculer l'induction magnétique totale $\vec{B}$, produite par tout le conducteur, il suffit d'intégrer :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in (C)} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \quad (1-14)$$

1.11. Application de la loi de Biot et Savard

1.11.a. Champ d'induction magnétique produit par un courant rectiligne infini

La figure (1.11) représente un fil infiniment long, parcouru par un courant électrique d'intensité I . On se propose de déterminer le champ d'induction magnétique produit par tout le fil en un point P situé sur l'axe oy .



Figure(1.11):Champ magnétique élémentaire créé par un courant électrique élémentaire rectiligne

Pour pouvoir appliquer la loi de Biot et Savard, on doit déterminer les composantes des vecteurs $d\vec{l}$ et $\vec{r}$ dans le repère cartésien Oxyz . Et puisque $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r \Rightarrow \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, on peut écrire

$$\text{la loi sous la forme : } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

$$d\vec{l} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & b & 0 \end{vmatrix} = b \cdot x \cdot \vec{k} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b \, dx}{r^3} \vec{k}$$

$$\text{Puisque : } r = \frac{b}{\cos \theta}, \text{ et } x = b \tan \theta \Rightarrow dx = b \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\text{Par substitution, on obtient : } d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \theta \, d\theta \, \vec{k}$$

En intégrant cette expression de $-\pi/2$ à $+\pi/2$, on obtient:

$$\vec{B} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\vec{B} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \theta \, d\theta \, \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \vec{k} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta \, d\theta$$

Finalement, on arrive à l'expression finale :

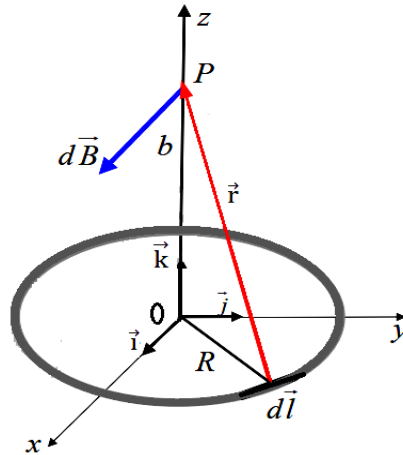
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \vec{k} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \quad (1-15)$$

Le vecteur $\vec{B}$ dans ce cas, est perpendiculaire au plan Oxy et dirigé selon l'une des règles d'orientation.

Remarque : Dans le cas d'un conducteur rectiligne, les lignes du champ magnétique, dessinent des cercles dont le centre est le conducteur et auquel elles lui sont perpendiculaires.

1.11.b. Champ d'induction magnétique produit par un courant circulaire

La figure (1.12) représente un anneau parcouru par un courant électrique d'intensité constante I . On se propose de trouver le champ d'induction magnétique sur l'axe Oz de l'anneau.



Figure(1.12): Champ magnétique produit par un courant circulaire

On choisit sur l'anneau une longueur élémentaire $d\vec{l}$, puis on calcule le champ magnétique élémentaire produit au point P . Afin d'obtenir le champ total, on doit intégrer. D'après la figure(1.13), on'a :

Les angles θ et α ont des côtés perpendiculaires, donc : $\left. \begin{array}{l} Oy \perp OX \\ d\vec{l} \perp R \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \theta$

$$d\vec{l} = -dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \Rightarrow d\vec{l} = -dl \sin \alpha \vec{i} + dl \cos \alpha \vec{j}$$

Puisque $dl = R d\alpha$

$$D'ou : d\vec{l} = -R \sin \alpha d\alpha \vec{i} + R \cos \alpha d\alpha \vec{j}$$

Donc, les composantes des vecteurs $d\vec{l}$ et $\vec{r}$ sont :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} -x = R \cos \alpha \\ -y = -R \sin \alpha \\ b \end{pmatrix}, \quad d\vec{l} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{l} = \begin{pmatrix} -R \sin \alpha \\ R \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

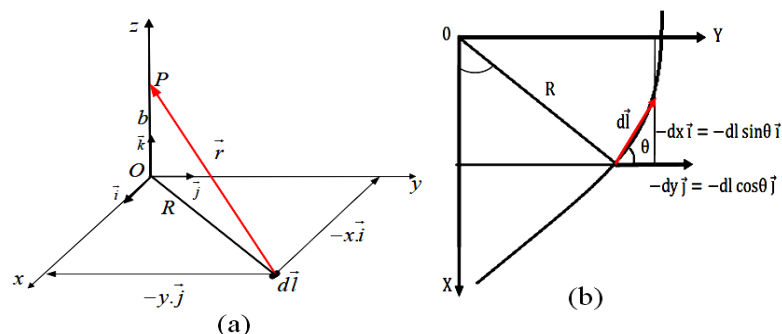


Figure (1.13): Détermination des Vecteurs $d\vec{l}$ et $\vec{r}$

On applique la loi de Biot et Savard : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \alpha & R \cos \alpha & 0 \\ -R \cos \alpha & -R \sin \alpha & b \end{vmatrix} d\alpha$$

$$d\vec{B} = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (Rb \cos \alpha d\alpha)}_{d\vec{B}_x} \vec{i} + \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (Rb \sin \alpha d\alpha)}_{d\vec{B}_y} \vec{j} + \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (R^2 d\alpha)}_{d\vec{B}_z} \vec{k}$$

Il nous apparaît que $d\vec{B}$ a trois composantes : $d\vec{B} = d\vec{B}_x + d\vec{B}_y + d\vec{B}_z$

Maintenant, il suffit d'intégrer les trois composantes de 0 à 2π , pour obtenir les trois composantes du champ magnétique produit par tout l'anneau :

$$B_x = \int_0^{2\pi} dB_x = \frac{\mu_0 IRb}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0$$

$$B_y = \int_0^{2\pi} dB_y = \frac{\mu_0 IRb}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = 0$$

$$B_z = \int_0^{2\pi} dB_z = \frac{\mu_0 IR^2 b}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 IR^2 b}{4\pi r^3} 2\pi$$

Finalement, on arrive à :

$$\vec{B} = \vec{B}_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2[R^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \Rightarrow B = B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2[R^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (1-16)$$

Cette expression n'est valable que si le point P appartient à l'axe qui est perpendiculaire à l'anneau et passe par son centre.

1.11.b1.Cas particulier

- **Premier cas** : Au centre de l'anneau $b = 0$, et quelque soit son rayon, on aura : $B = \frac{\mu_0 I}{2b}$.

-**Deuxième cas** : Si l'anneau est de rayon très petit $b \gg R$, on aura : $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2b^3}$

-**Troisième cas** : dans le cas d'une bobine plate, constituée de N spires, on prend le rayon moyen des spires et on multiplie le résultat précédent par le nombre N :

$$B = B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2[R^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} N.$$

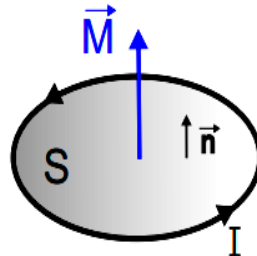
1.12.Dipôle magnétique

1.12.1.Définition, modélisation et champ crée

Un dipôle magnétique est une boucle de courant (I) de dimensions très petites devant la distance au point où l'on calcule ses effets (champ magnétique).

Soit une spire (boucle de courant filiforme) parcourue par un courant d'intensité I , on définit une surface orientée par l'intermédiaire d'un vecteur surface :

$$\vec{S} = \iint d\vec{S} = \iint dS \vec{n} \quad (1-17)$$



Figure(1.14): dipôle magnétique

1.12.2. Moment Magnétique

Le moment magnétique d'une boucle de courant de surface orientée $\vec{S}$ et parcourue par un courant I est par définition : $\vec{M} = I \cdot \vec{S}$ (1-18)

M: Moment magnétique

S : surface

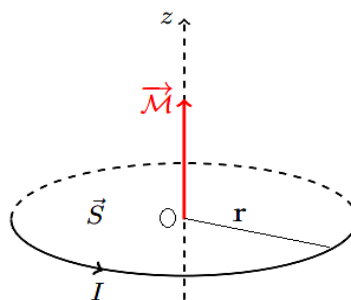
I : Courant

Le moment magnétique s'exprime en A.m²

Exemple : Spire circulaire

Soit une spire circulaire d'axe (Oz), de rayon (r) parcourue par un courant I (figure 1.14) :

cette spire présente un moment magnétique : $\vec{M} = I \cdot \pi r^2 \vec{e}_z$



Figure(1.14): Moment magnétique d'une spire circulaire d'axe oz

1.12.3. Induction électromagnétique

1.12.4. Le flux magnétique

1.12.3.a. Notion intuitive

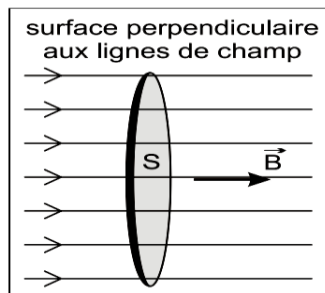
le phénomène de l'induction électromagnétique se manifeste dans un circuit dès que le nombre de lignes de champ à travers ce circuit varie.

Les physiciens ont défini une grandeur physique appelée flux magnétique Φ qui est justement une mesure du nombre de lignes de champ passant à travers un circuit.

Comme B est une mesure de la densité des lignes de champ, Φ est proportionnel à B et à S .

- Si la surface (S) est disposée perpendiculairement aux lignes de champ, alors $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ (constante de proportionnalité égale à 1, ce qui définit l'unité de Φ).

- Si la surface n'est pas perpendiculaire aux lignes de champ, alors $\Phi < \vec{B} \cdot \vec{S}$ Afin d'exprimer ce flux, les physiciens définissent le vecteur surface $\vec{S}$.



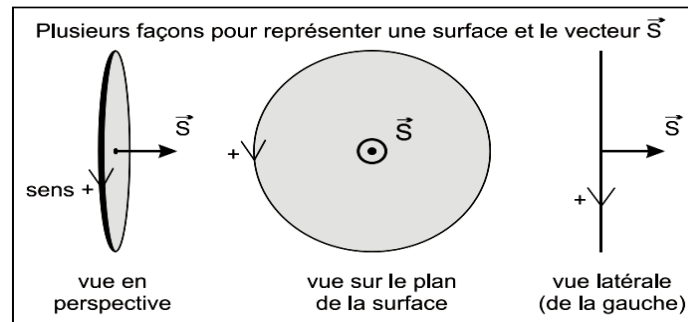
Figure(1.15): Lignes de Champs

1.12.3.b. Définition du vecteur surface

Tout d'abord on choisit un sens positif pour le contour de la surface.

Les caractéristiques du vecteur surface $\vec{S}$ sont :

- 1- point d'application : le centre de la surface
- 2- direction : perpendiculaire à la surface
- 3- sens : déterminé par la règle de la main droite : les doigts courbés indiquent le sens + et le pouce indique le sens de $\vec{S}$
- 4- norme : la valeur (S) de la surface (en m^2).



Figure(1. 16): Représentation une surface et le vecteur $\vec{S}$

1.13. Définition du flux magnétique

On appelle flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$, la grandeur : Φ avec:

- $d\vec{S}$ représente le vecteur de la surface élémentaire, qu'on considère toujours perpendiculaire à la surface et quittant la surface selon le sens positif choisi (selon la règle de la vis) sur le contour de la surface.
- On considère aussi, $\vec{B}$ uniforme à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$.

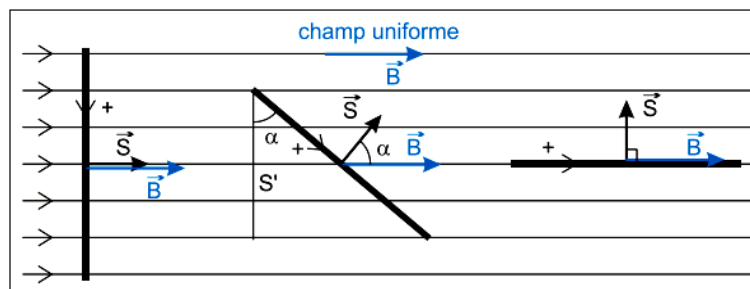


Figure (1.17): Flux magnétique à travers une surface

1. $\vec{S}$ parallèle à $\vec{B}$: $\Phi = B S$
2. Angle α quelconque entre $\vec{S}$ et $\vec{B}$: Φ à travers $S = \Phi$ à travers $S' = B S' = B S \cos \alpha = \vec{B} \cdot \vec{S}$
3. $\vec{S}$ perpendiculaire à $\vec{B}$: $\Phi = 0$ car aucune ligne de champ ne traverse $\vec{S}$.

Finalement, le flux d'un champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface $\vec{S}$ est défini par le produit

scalaire de $\vec{B}$ par $\vec{S}$: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos \alpha$ (1-19)

* Si la surface est délimitée par un circuit bobiné comportant N spires, la surface totale vaut N

fois la surface d'une spire, et : $\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = N B S \cos \alpha$ (1-20)

-Le Flux magnétique s'exprime en le weber (**Wb**) .

1.14.la loi de Faraday-Henry

4.14.1. Description de l'expérience et terminologie

La figure (1.18) représente une bobine creuse B , constituée d'un grand nombre de spires, reliée à un galvanomètre très sensible. Au début l'aimant est au repos et orienté selon l'axe de la bobine. Lorsqu'on approche l'aimant de l'intérieur de la bobine, avec une certaine vitesse, le galvanomètre indique le passage d'un bref courant qui disparaît avec l'arrêt du mouvement de l'aimant. Lorsque on retire l'aimant de la bobine, le galvanomètre indique le passage d'un bref courant dans le sens contraire signalé précédemment. Le courant enregistré s'appelle le courant induit, l'aimant est l'inducteur, et la bobine le circuit induit. On peut obtenir un courant induit, en faisant tourner la bobine devant l'aimant fixe.

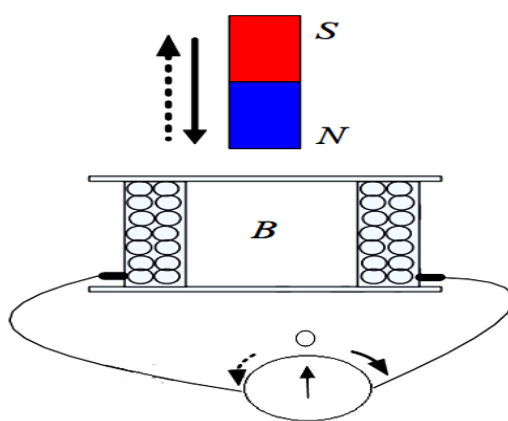


Figure (1.18): Induction électromagnétique

La cause de l'apparition de courant induit est la variation du flux magnétique à travers la surface de la bobine. Le courant induit ne dure que le temps de la variation du flux. L'apparition de ce courant induit prouve la présence d'une force électromotrice dont le siège est la bobine.

Cette force électromotrice dépend de la vitesse de variation du flux magnétique $\frac{d\Phi}{dt}$.

1.14.2. Enoncé de la loi de Faraday-Henry

Dans tout circuit fermé baignant dans un champ magnétique, il se crée une force électromotrice d'induction égale à la dérivée du flux magnétique, à travers le circuit, par

rapport au temps (c'est-à-dire égale à la vitesse de variation du flux) avec changement de signe :

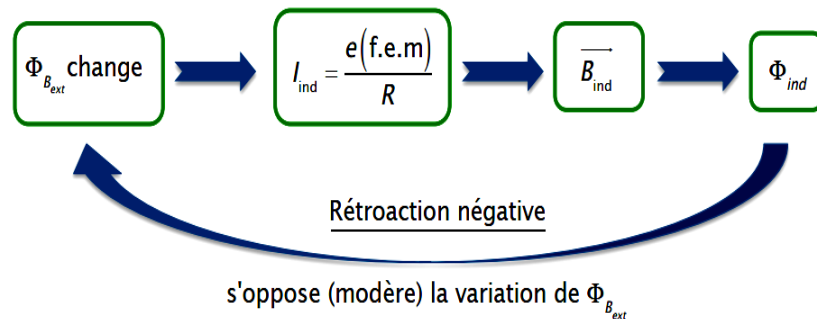
$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1-21)$$

1.15. La loi de Lenz

Cette loi permet la détermination du sens du courant induit.

-1. Il y a un courant induit dans un circuit fermé conducteur si et seulement si le flux magnétique à travers ce circuit change dans le temps. La direction du courant induit est elle que le champ magnétique induit s'oppose à la variation du flux.

D'une autre façon, on peut dire que l'effet de la **f.e.m** ($e = \frac{W}{q}$ (en J.C⁻¹ ou V)) induite est tel qu'il s'oppose à la variation du flux qui le produit.



Remarques:

- ✓ La loi de Lenz est empirique, elle correspond aux résultats des expériences, mais n'élucide pas leurs causes physiques.
- ✓ On peut seulement prédire le sens approprié du courant induit en éliminant un des deux sens impossible sur le plan énergétique.

-2.figure(1.19):Distingues deux Cas:

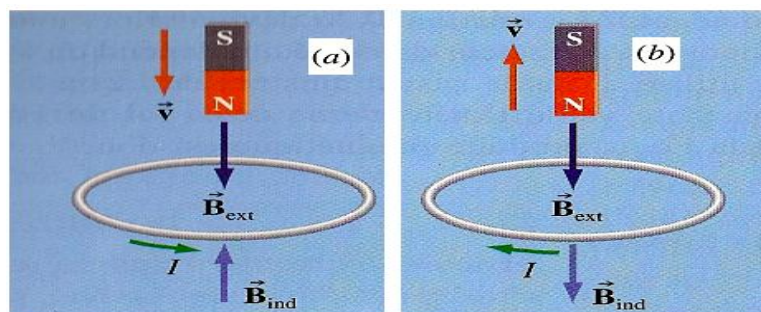


Figure (1.19): Champ magnétique du barreau aimanté et de la boucle.

(a): Lorsque le flux à travers la boucle augmente ,le flux correspondant au champ magnétique induit s'oppose à cette augmentation.

(b): Lorsque le flux à travers la boucle diminué , le flux correspondant au champ magnétique du courant induit essaie de maintenir le flux traversant la boucle.

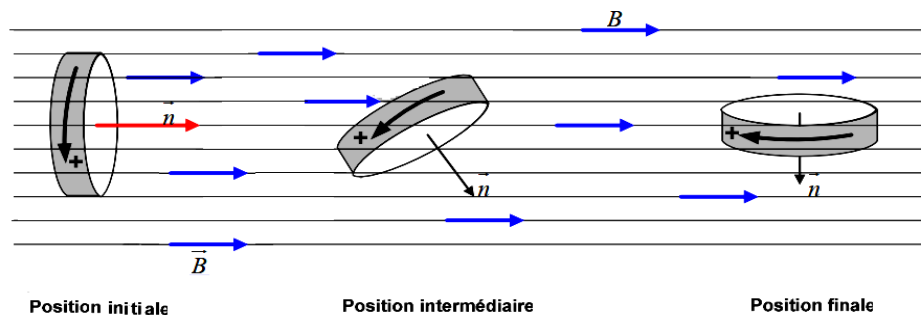
Note: Les figures ne montrent que le champ magnétique existant sur l'axe du barreau aimanté et de la boucle.

Exemple

Une bobine plate, constituée de $N = 500$ spires circulaires, de rayon $r = 0,1$ m , son axe est initialement parallèle au vecteur $\vec{B}$ d'un champ magnétique uniforme d'intensité $0,2$ T (figure ci-dessous). En l'espace de $0,5$ s , son axe devient perpendiculaire à $\vec{B}$.

1- Quelle est la force électromotrice d'induction moyenne qui se crée ?

2- Quel est le sens du courant induit ?



Solution

1- Dans sa position initiale, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal à la surface des spires, dans le même sens que $\vec{B}$. Donc, les spires sont dirigées dans le sens positif montré sur la figure. Dans cette position, le flux est positif et égal à :

$$\Phi_0 = N \vec{B} \cdot \vec{n} S = N B S = N B \pi r^2 = 500 \cdot 0,2 \cdot \pi (0,1)^2 = 3,14 \text{ Wb}$$

Dans la position finale, $\Phi_1 = 0$, et $\vec{B} \perp \vec{n}$.

La variation du flux est donc égale à : $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = -3,14 \text{ Wb}$

La force électromotrice d'induction moyenne durant $\Delta t = 0,5$ s , est égale à :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3,14}{0,5} = 6,28 \text{ v}$$

2- Le flux Φ décroît, et le courant induit, durant tout le temps du mouvement, circule dans le sens positif choisi.

Exercices Corrigés

Exercice:01

Un éclair transporte couramment un courant maximum de 20 k A . Quel est le champ magnétique maximum qu'il produit à 1m ? à 300 m ?

Solution

En admettant qu'une partie de l'éclair est rectiligne , on peut utiliser la loi : $B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$

$$B = \frac{4.10^{-7}.20.10^3}{2. \pi. 1} = 4.10^{-3} \text{ T}$$

Cette valeur est pour la distance de un mètre de l'éclair, mais à la distance de 300m le résultat

$$\text{est : } B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} = \frac{4.10^{-7}.20.10^3}{2.\pi.300} = 1,33.10^{-5} \text{ T}$$

Exercice:02

Une ligne rectiligne de tension est située a une hauteur de 12 m au dessus du sol. Elle transporte un courant de 300 A dans la direction de l'Ouest.

Décrire le champ magnétique qu'elle produit et calculer sa valeur sous la ligne au niveau du sol. Comparer le avec le champ magnétique terrestre.

Solution

D'après la règle de la main droite : si le courant circule vers l'ouest, le vecteur du champ magnétique produit par ce courant est dirigé vers le sud. Pour un courant rectiligne, l'intensité du champ magnétique est obtenue par l'application de la loi :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} = \frac{4.10^{-7}.300.}{2. \pi. 12} = 5.10^{-6} \text{ T}$$

Comparons le au champ magnétique terrestre $\vec{B}_0$

$$\frac{B}{B_0} = \frac{5.10^{-6}}{5.10^{-5}} = 10^{-1}$$

Le champ produit par la ligne électrique ne représente que 10 % du champ magnétique terrestre

Exercice:03

Soit une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

1/ Calculer le champ magnétique crée le long de l'axe OZ , à une distance z du centre O , en

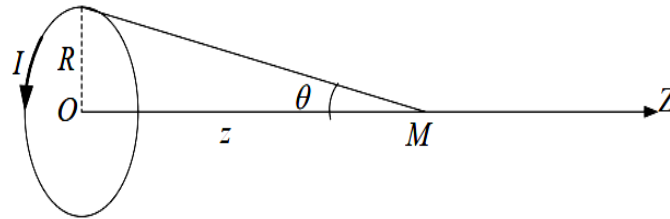
fonction de l'angle sous lequel on voit la spire (figure ci-dessous).

2/ Retrouver l'expression: $B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

3/ Quelle est la forme approchée de cette expression à grandes distances de l'axe OZ ?

4/ Exprimer le champ magnétique B_z en fonction du moment magnétique M .

5/ En déduire le champ B_0 créée au centre O de la spire.



Solution

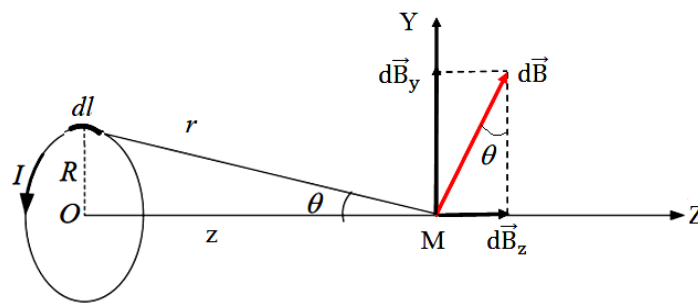
1/ D'après la loi de Biot et Savard, le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ produit par une longueur élémentaire dl de la spire parcourue par un courant électrique d'intensité I est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \wedge \vec{u}_r, \text{ Puisque } \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \text{ on peut écrire la loi sous la forme : } d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \wedge \vec{r}$$

On remarque que: $d\vec{l} \perp \vec{r}$, ce qui implique $|d\vec{l} \wedge \vec{r}| = dl r$, d'où : $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$.

On peut décomposer $d\vec{B}$ en deux composantes $d\vec{B}_z$ et $d\vec{B}_y$, de telle façon que lors de l'intégration, toutes les composantes $d\vec{B}_y$ s'annulent deux à deux en raison de la symétrie.

Le champ total est la résultante de toutes les composantes $d\vec{B}_z$, et donc $\vec{B}_z$ résultant est parallèle à l'axe OZ.



Par projection (voir figure), on obtient : $dB_z = dB \sin \theta \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \theta$

Pour trouver B_z , on intègre l'expression précédente par rapport à la seule variable l , pour

arriver à : $B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta 2\pi R \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 R I}{2 r^2} \sin \theta$, Puisque $\sin \theta = \frac{R}{r}$, on

peut donc obtenir l'expression finale du champ : $B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi r^2} \sin^3 \theta \Leftrightarrow \vec{B}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi r^2} \sin^3 \theta \vec{u}_z$

2/ En remplaçant cette fois $\sin \theta$ par $\frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$ on obtient l'expression proposée :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

3 / La forme approximative de cette expression à de grandes distances de l'axe OZ , est obtenue en négligeant le rayon de la spire devant la grande distance z , le résultat est :

$$B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3}$$

4/ Expression de B_z en fonction du moment magnétique M :

$$\left. \begin{array}{l} M = S I \\ S = \pi R^2 \end{array} \right| \Rightarrow M = \pi R^2 I$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}, \text{ en multiplie, et en divise par : } \pi$$

$$\text{Donc : } B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

5/ On obtient le champ magnétique produit au centre de la spire en prenant $z = 0$: $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Exercice:04

1/ Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe (ox) d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I .

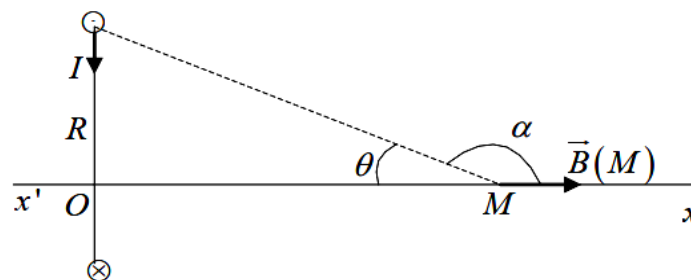
2/ Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe (ox) , (de $-\infty$ à $+\infty$) d'un solénoïde circulaire de rayon R , de longueur l et comportant N spires jointives parcourues chacune par un courant I .

Solution

1/ Le vecteur champ magnétique produit par une spire circulaire (de rayon R et parcourue par un courant d'intensité I) en un point de son axe est donné par l'expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{2R} \vec{u}_x$$

La circulation du vecteur $\vec{B}$ sur l'axe (xOx') est égale à : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$



Sachant que : $x = -\frac{R}{\tan \alpha} \Rightarrow dx = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$, et puisque $\alpha + \theta = 180^\circ$, on a : $\sin \theta = \sin \alpha$

$$D'où : \zeta = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} R d\alpha \Rightarrow \zeta = \mu_0 I$$

2/ Le conducteur solénoïdal est constitué de N spires circulaires, pour obtenir la circulation du champ, il suffit de multiplier le résultat précédent par N, on trouve :

$$\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx = N \mu_0 I$$

Exercice:05

On considère un câble de rayon R, de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans la section du conducteur.

A l'aide du théorème d'Ampère, déterminer l'intensité du champ magnétique en un point situé à la distance r de l'axe du câble. Tracer la courbe B(r).

Solution

Le sens du champ magnétique s'obtient avec la règle de la main droite.

- Champ magnétique à l'extérieur du câble ($r > R$) :

Appliquons le théorème d'Ampère avec un contour circulaire (C) centré sur le câble.

La circulation s'écrit : $C = B 2 \pi r$

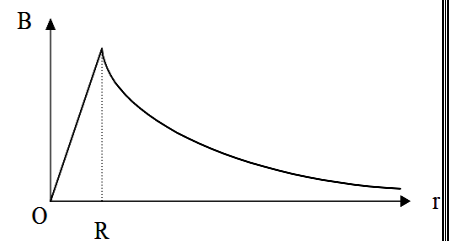
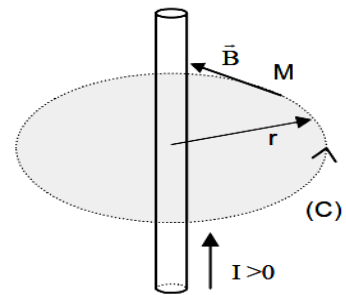
Théorème d'Ampère : $C = \mu_0 I$.

$$D'où : B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$

- Champ magnétique à l'intérieur du câble ($r < R$) :

Dans la section de rayon r passe le courant : $J = I \frac{\pi r^2}{S} = I \frac{r^2}{R^2}$

$$C = B 2 \pi r = \mu_0 J \quad , d'où : B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R^2} r$$



Exercice:06

Un fil rectiligne parcouru par un courant $I = 5 \text{ A}$ est placé dans une induction uniforme $B = 0,4 \text{ T}$. Seule une longueur $L = 3 \text{ cm}$ de ce fil baigne dans le champ magnétique.

Calculer la force électromagnétique F qui agit sur la portion de ce fil :

- 1 - Quand l'induction $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction du fil.
- 2 - Quand l'induction $\vec{B}$ fait un angle $\alpha = 45^\circ$ avec la direction du fil.

Solution

La force électromagnétique F qui agit sur la portion de fil a pour valeur

$$F = B \cdot I \cdot L \cdot \sin \alpha$$

1 - L'angle α vaut 90° ; donc $\sin \alpha = 1$

$$F = 0,4 \times 5 \times 0,03 = 60 \times 10^{-3} \text{ N}$$

2 - L'angle α vaut 45° ; donc $\sin \alpha = 0,707$

$$F = 0,4 \times 5 \times 0,03 \times 0,707 = 42,4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Exercice:07

Une bobine , de résistance négligeable, constituée de 100 spires d'un diamètre moyen de 10 cm est connectée aux bornes d'une résistance R de 7Ω . Elle baigne dans un champ magnétique.

Le plan des spires est perpendiculaire aux lignes de champ et l'induction varie linéairement depuis $B = 5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ jusqu'à $B = 0$ en 10^{-1} s .

1- Calculer la f. e. m induite E qui apparaît aux bornes de la bobine.

2- Calculer le courant induit I .

3- Des deux dipôles câblés (bobine, résistance) lequel est générateur ?

4- Dans la bobine, le courant induit va-t-il du pôle + vers le pôle – , ou du pôle – vers le pôle + ?

Solution

1- Calcul de la f. e. m induite:

On 'a: $e = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$, et $|\Delta\Phi| = N |\Delta B| S = N |\Delta B| \pi r^2$, Donc:

$$|\Delta\Phi| = 100 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \pi \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 393 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$e = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = \frac{393 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 393 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 393 \text{ mV}$$

2- Calcul du courant induit

$$I = \frac{e}{R} = \frac{0,393}{7} = 0,056 \text{ A} = 56 \text{ mA}$$

3-C'est la bobine qui est génératrice.

4-Le courant induit I circule du + au – dans la résistance et du – au + dans la bobine.

Exercice:08

Considérons deux conducteurs parallèles formant un "rail de Laplace" sur lequel peut se déplacer une barre mobile conductrice MN selon le schéma ci-dessous (vue de dessus) . Le

générateur a une f.é.m $E = 5 \text{ V}$ et une résistance interne $R = 5 \Omega$, la barre MN de longueur totale $L = 0,12 \text{ m}$ a une résistance négligeable, elle crée un court-circuit en refermant le circuit entre les deux rails. On place MN dans l'entrefer d'un aimant en U (de largeur $d = 4 \text{ cm}$) où règne un champ magnétique uniforme de norme $B = 0.1 \text{ T}$

1/ Expliquez (et justifiez à l'aide de quelques mots et d'éventuellement un schéma) comment on doit placer l'aimant en U pour obtenir le champ magnétique tel qu'il est représenté sur la figure par le vecteur $\vec{B}$, c'est à dire perpendiculaire au plan du schéma (ou des rails) et dirigé vers le haut.

2/ Déterminez le sens et l'intensité du courant dans le circuit.

3/ Déterminez en direction, sens et grandeur la force de Laplace agissant sur la barre MN. (aidez- vous d'un schéma représentant les vecteurs significatifs)

4/ La barre MN se déplace (à vitesse considérée constante) dans le champ magnétique sur une longueur de 6 cm dans le sens impliqué par la force de Laplace.

4.1/ Déterminer le flux coupé par la barre.

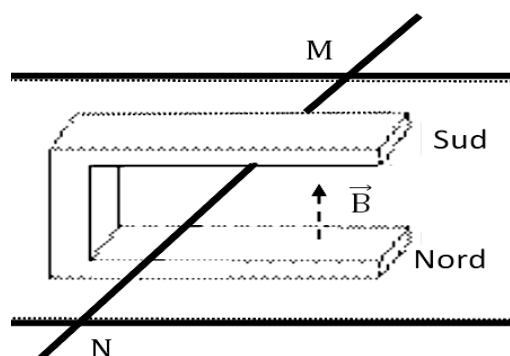
4.2/ En déduire le travail exercé lors de ce déplacement de la barre MN.

5/ Quelle est alors la force électromotrice induite dans le circuit si le parcours a lieu en 1 m s ? Représentez cette force électromotrice ($\mathcal{E}$).

6/ En conclusion, commentez le sens de la force électromotrice induite et les conséquences de son action dans le circuit.

Solution

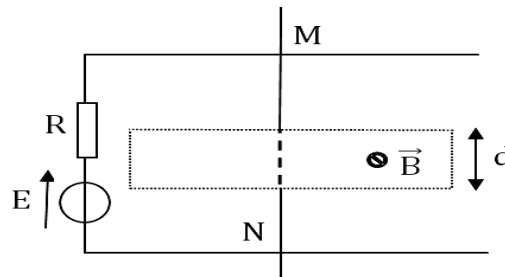
1- Position de l'aimant: L'aimant doit être placé pôle Sud vers le haut



2- Le sens de I est donné par le sens de E (voir le schéma) de M vers N. La tension aux bornes du générateur est nulle (court-circuit)

$$U = E - rI = 0$$

soit: $I = \frac{E}{r} = \frac{5}{5} = 1 \text{ A}$



3- La longueur du conducteur soumis au champ magnétique correspond à la distance notée «d» dans l'énoncé et non pas à la longueur totale L de la barre

$F = B.I.l.\sin\alpha$ s'écrit donc ici : $F = B.I.d.\sin\alpha$, avec: $\sin\alpha = 1$

(α étant l'angle entre la direction du conducteur et le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ et donc : $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

On'a donc: $F = B I d = 0.1 \times 1 \times 4.10^{-3} = 4.10^{-3} \text{ N}$

D'après la règle d'orientation régissant les sens de la force $\vec{F}$, de l'intensité I et du champ magnétique $\vec{B}$ (les sens de I , $\vec{B}$ et $\vec{F}$ forment un trièdre direct) , la force $\vec{F}$ est dirigée vers la gauche.

Exercice:09

Deux rails XX' et YY' , parallèles et horizontaux, distants de $L = 0,2 \text{ m}$ (voir la figure), ont une résistance négligeable. Ils sont placés dans un champ magnétique uniforme, de vecteur vertical, vers le haut et d'intensité $B = 4 \times 10^{-2} \text{ T}$. Leurs extrémités sont reliées par une résistance $R = 0,25 \Omega$. Une tige métallique MN, cylindrique, de résistance négligeable, est placée sur les rails perpendiculairement à leur direction. Le sens de circulation arbitraire est indiqué sur le document (1). On déplace la barre, parallèlement à elle-même, à une vitesse constante de $V = 0,5 \text{ m/s}$.

1) Au cours du mouvement de la tige, un courant électrique d'intensité i passe

1-1) Utiliser la loi de Lenz pour justifier le passage de ce courant

1-2) Déterminer son sens par rapport au sens de circulation arbitraire.

1-3) Préciser les pôles du générateur induit.

2) On désigne par n le vecteur normal au circuit et par dx le déplacement de la barre pendant la durée dt.

2-1) Indiquer le sens de n par rapport à B.

2-2) Ecrire l'expression du flux magnétique en fonction de B et S

2-3) Utiliser la loi de Faraday pour calculer la force électromotrice induite e en fonction de B , l et V .

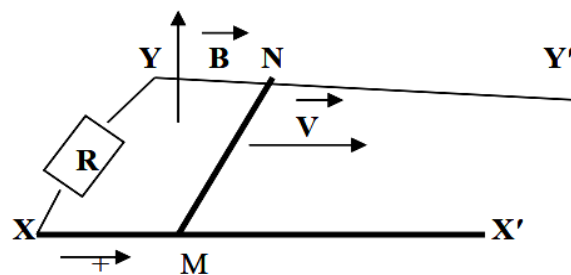
3) calculer l'intensité I du courant induit qui parcourt le circuit. Confirmer le sens de I

4) F est la force électromagnétique de Laplace exercée par le champ sur le conducteur MN au cours du déplacement.

4-1) Calculer son intensité.

4-2) La puissance développée cette force $P = FV$. Calculer P .

4-3) La puissance électrique fournie par le générateur $P_{\text{fournie}} = e I$. Calculer P_{fournie} .



Solution

1-1) Au cours du mouvement de la barre, le flux magnétique varie, sa variation est le siège de production d'une force électromotrice (e) et la tige se comporte comme un générateur induit. Le circuit est fermé, un courant induit d'intensité I passe de façon que par ses effets électromagnétiques il s'oppose à sa cause trois cas:

1-2) Le champ magnétique doit exercer sur I dans la barre une force de Laplace F de sens contraire que V pour s'opposer à la cause. Pour cela et d'après la règle des trois doigts de la main droite I passe dans la tige de N vers M . Alors, il est de sens contraire que le sens de circulation arbitraire.

1-3) La tige est le générateur, le courant circule dans le circuit extérieur au générateur (dans R) du pôle (+) vers le pôle (-). Alors M est le pôle (+) et N le pôle (-)

2-1) D'après la règle de la main droite, n est de même sens que B

2-2) $\Phi = B \times S \times \cos(n, B) = B \times S$

2-3) $e = - \frac{d\Phi}{dt} = - B \frac{dS}{dt}$

$$dS = l dx \quad ; \quad \frac{dS}{dt} = l \frac{dx}{dt} = l V$$

Alors: $e = - B l V = - 4.10^{-2} . 0,2 . 0,5 = - 4.10^{-3} \text{ Volt}$

3) On a : $e = I \times R \Rightarrow I = \frac{e}{R} = - B l \frac{V}{R} = - 4.10^{-2} . 0,2 . \frac{0,5}{0,25} = - 0,016 \text{ A}$

$I < 0$ donc: I est de sens contraire que le sens de circulation arbitraire.

$$4-1) F = I B l \sin (I, B) = 0,016.4.10^{-2}.0,2 = 128.10^{-6} \text{ N}$$

$$4-2) P = 128.10^{-6}.0,5 = 64.10^{-6} \text{ W}$$

$$4-3) P_{\text{fournie}} = 4.10^{-3}.0,016 = 64.10^{-6} \text{ N}$$

Alors : $P = P_{\text{fournie}}$ aucune perte.

*** Bibliographie**

- [1] D. Sivoukhine, "Cours de physique Général, tome III électricité" Union Soviétique, traduction Française, Edition Mir, 1987.
- [2] D. FEDULLO, T. GALLAUZIAUX, Electricité: Réaliser son installation par soi-même, Ed. Eyrolles, (2012)
- [3]] Étienne TISSERAND, Jean-François PAUTEX et Patrick SCHWEITZER. *Analyse et traitement des signaux*- 2e éd.: Méthodes et applications au son et à l'image. Dunod, 2009
- [4] Physique- Electromagnétisme (Cours-Méthodes-exercices résolus) , P.KREMPF (Pr Lyon), edition Agnès Nicol - 2003
- [5] Traité d'électricité et de magnétisme (Tome I), Jammes Clerk MAXWELL, Editions JACQUES GABAY, 1989.
- [6] M.Berlin, J.P. Faroux et J. Renault, "Electromagnétisme 1, Electrostatique", Dunod, 1977.
- [7] M.-N. SANZ, D. CHARDON, F. VANDENBROUCK, B. SALAMITO, Physique tout-enun PC, PC* : cours et exercices corrigés ; Dunod, Paris (2014)
- [8] Electricité et magnétisme, Fizazi Ahmed, Office des publications universitaires, Algérie, 2011
- [9] J.L. Queyrel, J. Mesplède, " Précis de physique, Electricité 2, cours, exercices résolus", Bréal, 1985.
- [10] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli "La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétiqe" 2ième Edition, Edi-Science, 2006.
- [11] J .L .CAUBARRERE, Electricité et ondes : cours et travaux pratiques OPU Alger, (1986)
- [12] Collectif Ediscience: La physique en fa : électrostatique et électrocinétique 1ère et 2ème année; Ediscience international, (2010)
- [13] R. A. SERWAY, J. W. JEWETT, JR., A. DUCHARME, M. PÉRIARD, Physique - Tome 2 Electricité et magnétisme, Ed. De Boeck, (2013)
- [14] L. AÏT GOUGAM, M. BENDAOU, N. DOULACHE, F. MEKIDECHE, Polycopié de physique 2, OPU Alger, (2012)
- [15] J-P. PEREZ, R. CARLES, R. FLECKINGER. Electromagnétisme - Fondements et applications Ed. Masson Paris (2001).
- [16] Y. GRANJON ; Exercices et Problèmes d'Electricité ; Dunod, Paris, (2003)

- [17] Analyse des Circuit Electriques, Alexander et Sadiku, Bruxcelles, Mc Graw Hill, de boeck ,2012;
- [17] Jean PÉRICART. Cours d'électricité théorique, Tome 1 : Electrostatique - Electrocinétique. 1962.
- [18] Traité d'électricité et de magnétisme (Tome I), Jammes Clerk MAXWELL, Editions JAQUES GABAY,1989.
- [19] J. Faget et J. Mazzaschi, "Travaux dirigés de physique, Généralités", Vuibert, 1970.