Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre universitaire Nour elbachir d'elbayadh

Institut des sciences

Département :Technologie

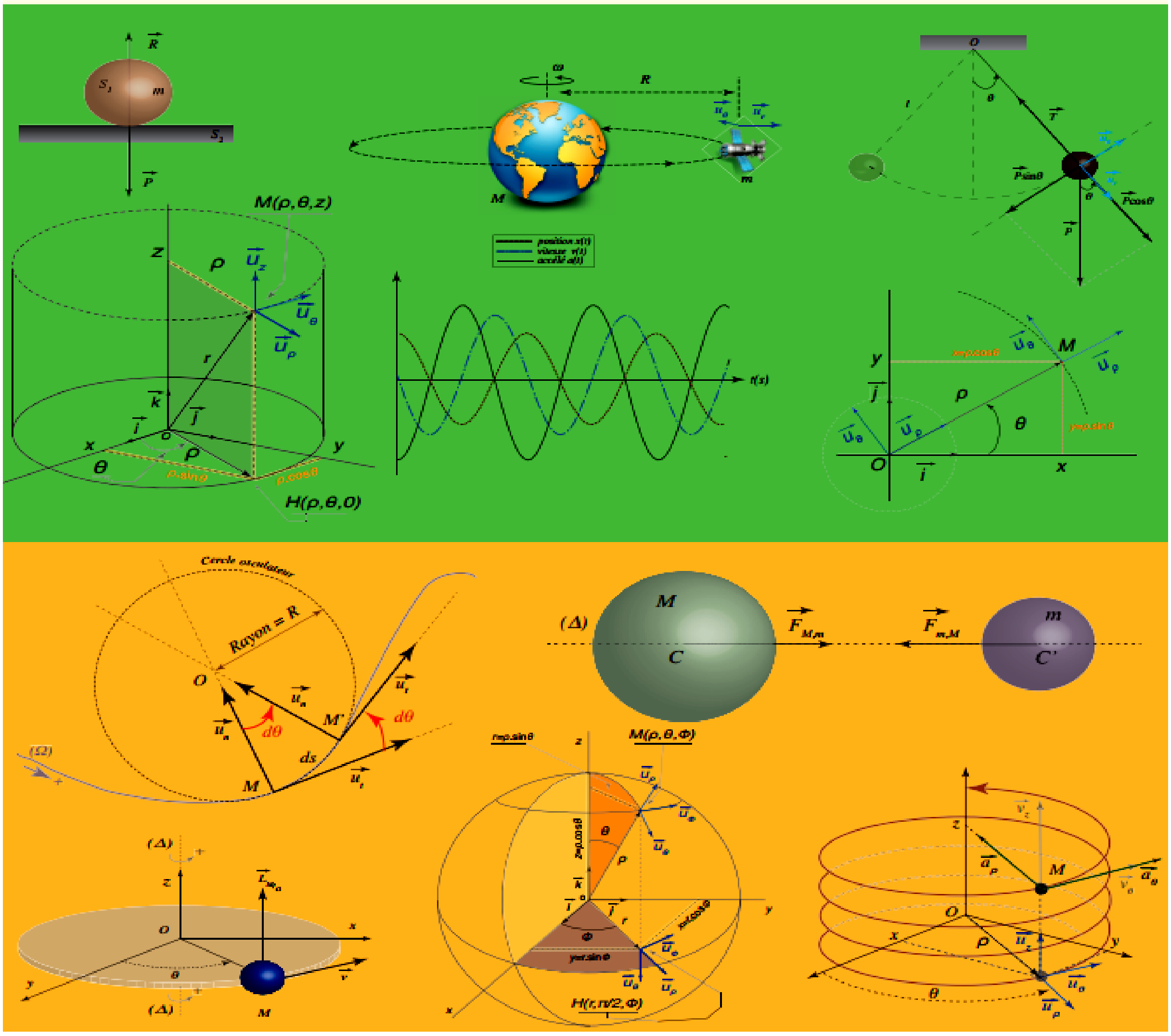
Polycopié

Cours mécanique du point matériel

(Unité Fondamentale-- Domaine Sciences et Technique – S1 Licence LMD)

Dr. MEBREK MOUED

Maître de Conférences "B"



Année : 2018/2019

AVANT PROPOS

Ce polycopié de cours de mécanique du point matériel est un moyen pédagogique destiné aux étudiants de la première année sciences et technologie (ST) du système LMD, il peut servir comme un support au cours dispensé aux étudiants. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide. Le contenu de ce polycopié est structuré en quatre chapitres.

CHAPITRE I

Rappels mathématiques: analyse dimensionnelle, vecteurs , L'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées.

CHAPITRE II

Cinématique du point matériel. Son but est de décrire les mouvements d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent. Il traite uniquement des mouvements de points matériels c'est-à-dire exclusivement des translations.

CHAPITRE III

Dynamique du point matériel. Il est proposé pour étudier Le principe d'inertie et les référentiels galiléens, Le principe de conservation de la quantité de mouvement, Définition Newtonienne de la force (3 lois de Newton), Quelque loi de forces. l'objectif et de appliqué les lois de Newton pour la résolution des problèmes.

CHAPITRE IV

Travail et énergie du point matériel. Il traite le travail d'une force, La puissance, Energie et collision de particules. Son but et de savoir calculer l'énergie cinétique d'un mobile et l'énergie mécanique d'un système, déterminer l'équation différentielle d'oscillateur harmonique.

On souhaite à tous nos étudiants un très bon cursus universitaire et un parcourt plein de réussite.

sommaire

Chapitre I : Rappels Mathématiques

I.1. Généralités sur les grandeurs physiques

Une grandeur physique est tout ce qui prend, dans des conditions bien déterminées, une valeur numérique définie qui peut varier (augmenter ou diminuer) si ces conditions elles mêmes varient. On distingue deux types de grandeurs:

I.1.1. Grandeurs physiques repérables

Une grandeur physique est repérable s'il est possible de définir une relation d'ordre pour chaque couple d'observation une grandeur, sans lui donner des valeurs numériques précises.

Exemple : Dureté, Viscosité, Rigidité diélectrique, …………

I.1.2. Grandeurs physiques mesurables

Une grandeur physique est mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèce, et s'il est possible aussi de lui associer une valeur numérique. Il existe deux types de grandeurs mesurables : Scalaires et Vectorielles.

I.1.2.1.Grandeur scalaire: Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante

Exemple: Longueur, Masse, Temps, la température ……

I.1.2.2. Grandeur vectorielle: un grandeur vectorielle est un grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

Exemple ;le poids, Vitesse, Accélération, la force …….

I.2. Systèmes fondamental

Les sciences physiques font appel à des grandeurs qui peuvent être mesurées ou repérées a ces grandeurs physiques peut être associée une valeurs numérique qui en traduit l'intensité. Le système international $(S.I.)$ contient sept unités de base $M.K.S.A$ (M : Mètre, K: Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère).

Grandeur	Symbole	Unité	Désignation
Longueur	m	mètre	L
Masse	Kg	kilogramme	M
Temps	s	seconde	T
Intensité du courant électrique	A	ampère	I
Température thermodynamique	K	degré Kelvin	θ
Intensité lumineuse	Cd	candela	δ
Quantité de matière	mol	mole	mol
Angle plan	rad	radian	rad

Chacune des unités est rattachée à une grandeur physique qui définit sa nature . nature, on l’appelle dimension.

Remarque : Il existe aussi d’autres systèmes d’unités en physique, comme par exemple :

- Le système $C.G.S$ (Centimètre, Gramme, Seconde) ;
- Le système $M.T.S$ (Mètre, Tonne, Seconde).

Toutes les autres sont liées à ces grandeurs fondamentales.

I.2.1.Notions de dimensions:

- La connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur la nature

- La dimension d'une grandeur G se note $[G]$.

- Toute relation doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres ont la même dimension. Ainsi l'équation $A = B + C.D$ n'a de sens que si les dimensions de A et de $(B + C.D)$ sont identiques. Pour obtenir la dimension du second membre on doit appliquer les règles suivantes :

- la dimension du produit $C.D$ est le produit des dimensions de chacune des grandeurs C et D: $[C.D] = [C].[D]$

- La dimension de la somme $B + C.D$ est la somme des dimensions de chacun des deux termes B et $C.D$: $[B + C.D] = [B] + [C.D]$

Remarques

Toute équation aux dimensions d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :

$$[G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e J^f N^g$$

Pour les fonctions : $\sin(f), \cos(f), \tan(f), \log(f)$ et e^f , l'argument f est sans dimension.

Exemples :

-Une vitesse : $[v] = \frac{[l]}{[t]} = LT^{-1}$

- Une accélération : $[a] = \frac{[l]}{[t^2]} = LT^{-2}$

- Une force : $F = m.a$; $[F] = [m].[a] = MLT^{-2}$

- Un travail : $W = F.l$; $[W] = [F].[l] = ML^2T^{-2}$

- Une puissance : $P = \frac{W}{t}$; $[P] = ML^2T^{-3}$

- Une quantité de chaleur : $[Q] = ML^2T^{-2}$

- Une pression, une contrainte : $p = \frac{F}{S}$, $[p] = ML^{-1}T^{-2}$

I.3.Calcul d'erreurs

Pour toute grandeur mesurable A, il est possible de définir :

- sa valeur mesurée x

- sa valeur exacte x_0 qu'on ne peut pas atteindre

I.3.1. Erreur Absolue :

Quelque soit la précision de la mesure d'une grandeur x , nous n'obtenons qu'une valeur approchée x . La différence entre la valeur exacte et la valeur approchée s'appelle e**rreur absolue :** $\delta x = x - x_0$ (I-1)

I.3.2.L'erreur relative: est le quotient de l'erreur absolue à la valeur de référence. L'erreur relative est sans dimension; elle nous indique la qualité (la précision) du résultat obtenu. Elle s'exprime en termes de pourcentage

Erreur relative = $\frac{\Delta x}{x}$ (I-2)

I.3.3.Incertitude absolue

Une mesure x est toujours accompagnée d'une incertitude Δx

$x = (x_0 \pm \Delta x)$ signifie que la valeur de x est comprise entre deux valeurs limites connues : $x_0 - \Delta x < x < x_0 + \Delta x$

Pour plus de précision, nous pouvons donner une définition mathématique à l'incertitude absolue en suivant le raisonnement suivant :

Soit une grandeur $X = f(x, y, z)$ où x, y , et z représentent des grandeurs mesurables comportant des incertitudes.

L'incertitude absolue de X , c'est- à- dire Δx , est matérialisée par la différentielle dx telle que $\Delta x \leq |dx|$.
Puisque le signe de l'erreur est inconnu il est tout à fait logique de prendre la valeur absolue pour les différentielles.

Sachant que $dX = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy + \frac{\delta f}{\delta z} dz$ (I-3)

L'incertitude absolue Δx de x s'écrit donc :

$$\Delta x \leq \left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right| \Delta y + \left|\frac{\delta f}{\delta z}\right| \Delta z \quad \text{(I-4)}$$

Exemples:

$$d = (354 \pm 3) \Rightarrow 351\,[\mathrm{km}] < d < 357\,[\mathrm{km}]$$

$$m = (5{,}25 \pm 0{,}02)\,[\mathrm{kg}] \Rightarrow 5.23\,[\mathrm{kg}] < m < 5.27\,[kg]$$

Toutefois, il est erroné d'écrire:

$\mathrm{d} = (15{,}83379 \pm 0{,}173)$ [m]

puisqu'il y a une incertitude, il faut écrire: $\mathrm{d} = (15{,}8 \pm 0{,}2)$ [m]

I.3.4. Incertitude Relative

On appelle incertitude relative d'une grandeur X le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée, soit $\frac{\Delta x}{x}$, et elle est égale au module de la différentielle logarithmique : $\frac{\Delta x}{x} = |\frac{dx}{x}|$.Elle est indiquée en % ou en ‰.

Exemple: Si: $\mathrm{m} = (25{,}4 \pm 0{,}2)$ [m] $\Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = \frac{0.2}{25.4} = 0.8\%$

I.4. L'incertitude résultant d'un calcul :

I.4.1.Addition ou soustraction de plusieurs mesures :

L'incertitude absolue d'une somme algébrique de nombres incertains est égale à la somme arithmétique des incertitudes absolues de ces nombres. Soit la somme algébrique : $y = nu + pv - qw + k$ où n, p , et q sont des coefficients constants et positifs, k une constante sans incertitude et Δu , Δv et Δw les incertitudes absolues respectives de u , v , et w . L'incertitude absolue de y est

$$\Delta y = n\,\Delta u + p\Delta v + q\Delta w$$

$$y = nu + pv - qw + k \implies \Delta u = |n|\Delta u + |p|\Delta v + |q|\Delta w$$

Remarque : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme :

$y_0 = (y \pm \Delta y)u$ avec y_0 : valeur exacte, y : valeur approché

Δy : incertitude absolue , u : unité de la grandeur.

I.4. 2. L'incertitude relative d'un produit:

Nous devons distinguer deux cas :

I.4.2. 1. Grandeurs indépendantes:

Soit le produit $y = k\, u^n v^p\, w^{-q}$,où n, p , et q sont des nombres réels et k une constante connue avec exactitude ; les incertitudes absolues sur u, v , et w sont respectivement Δu , Δv et Δw , Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation.

$$\log\, y = \log\, k\, u^n v^p\, w^{-q} \qquad \text{(I-5)}$$

D'après les propriétés du logarithme nous pouvons écrire :

$\log\, y = \log\, k + n \log u + p \log v - q \log w$

Ecrivons à présent la différentielle logarithmique et développons ensuite :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dk}{k} + n\,\frac{du}{u} + p\,\frac{dv}{v} - q\,\frac{dw}{w}$$

Nous arrivons à l'expression de l'incertitude relative (après avoir changé le signe – en signe +) et en prenant l'incertitude absolue des nombres :

$$\frac{dy}{y} = |n\,|\frac{du}{u} + |p\,|\frac{dv}{v} + |q\,|\frac{dw}{w} \qquad \text{(I-6)}$$

*Nous retiendrons la règle générale qui gère ce type de calcul :

*Remplacer tous les symboles di par Δi

*Changer le signe – par le signe +

*Prendre les grandeurs qui ne contiennent pas de Δ en valeurs absolues.

I.4.2. 2.Grandeurs dépendantes les unes des autres

Soit A une grandeur physique qui s'écrit en fonction d'autres grandeurs x, y et z :

$$A = k\frac{x^m\, y^n}{z^p} \qquad \text{(I-7)}$$

Le calcul d'erreur (ou plus exactement le calcul d'incertitude) permet d'estimer ΔA, connaissant $\Delta x, \Delta y$ et Δz.

La méthode générale est la suivante :

a- On calcule le logarithme de l'expression de A puis sa différentielle logarithmique

$$\log\ A = \log\ k\frac{x^m\ y^n}{z^p} \qquad \text{(I-8)}$$

Ecrivons à présent la différentielle logarithmique et développons ensuite

$$log\ A = \log\ k + m\log x + n\log\ y - p\log\ z$$

Ecrivons à présent la différentielle logarithmique et développons ensuite :

$$\frac{dA}{A} = m\ \frac{dx}{x} + p\ \frac{dy}{y} - q\ \frac{dz}{z} \qquad \text{(I-9)}$$

Remplacer tous les symboles di par Δi

*Changer le signe – par le signe +

*Prendre les grandeurs qui ne contiennent pas de Δ en valeurs absolues.

$\frac{\Delta A}{|A|} = m\ \frac{\Delta x}{|x|} + p\ \frac{\Delta y}{|y|} - q\ \frac{\Delta z}{|z|}$ ce qui est l'incertitude relative sur A.

Alors l'incertitude absolue sur A est: $\Delta A = (m\ \frac{\Delta x}{|x|} + p\ \frac{\Delta y}{|y|} - q\ \frac{\Delta z}{|z|})|A|$ (I-10)

Exemple: $R = \rho\ \frac{L}{S}\ \rightarrow \qquad \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta S}{S}$

I.5. Les vecteurs

I.5.1. Présentation graphique d'un vecteur

Un vecteur est une grandeur définie: Fig.I-1

$\vec{V}$: représente le vecteur (avec ses quatre caractéristiques)

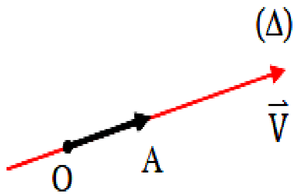


Fig.I-1. Présentation graphique d'un vecteur

* Une origine : au point d'application O.

*Une direction : celle de la droite Δ

*Un sens : celui indiqué par flèche.

*Un module : la longueur du vecteur . $\|\vec{V}\| = |\vec{V}| = V$

- Un vecteur est dit lié si les quatre caractéristiques sont fixes.
- Il est dit glissant si seulement trois caractéristiques sont fixes à savoir la direction, le sens et le point d'application
- le vecteur est dit libre si l'origine est arbitraire,

I.5.2. Vecteurs unitaires:

Les vecteurs dont le module correspond à l'unité de longueur sont appelés vecteurs unitaires. Si est un vecteur de module A, alors : $\frac{\vec{A}}{A} = \vec{u}$, est un vecteur unitaire de même direction que , avec: $\vec{A} = A.\vec{u}$

I.5.3. Vecteurs unitaires orthogonaux

Les vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ (ou $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$) sont des vecteurs unitaires perpendiculaires deux à deux, ils sont dirigés positivement le long des axes X, Y et Z d'un système d'axes orthogonaux

I.5.4. Composantes d'un vecteur

L'origine d'un vecteur $\vec{A}$ dans l'espace à trois dimensions peut être l'origine O d'un système d'axes orthogonaux. Soit A_1, A_2 et A_3 les composantes de ce vecteur suivant les trois axes X, Y et Z.

Le vecteur A s'écrit alors : $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$

Le module de $\vec{A}$ est $\|\vec{A}\| = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2}$ (I-11)

En particulier, le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, d'origine O et d'extrémité le point M , de coordonnées (x, y, z) s'écrit :$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Et a pour module: $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (I-12)

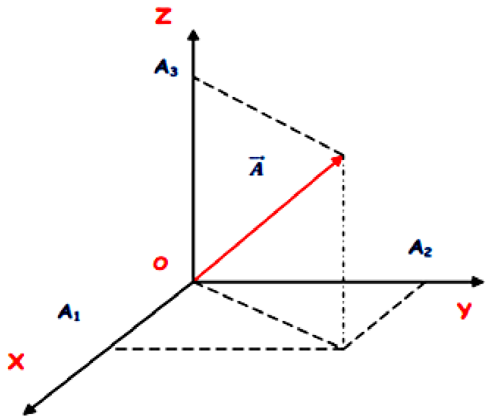


Fig. I- 2:Les trois composantes d'un vecteur

I.5.4.1. En coordonnées rectangulaires : on décompose le vecteur $\vec{V}$ suivant l'axe des X et l'axe des Y, comme indiqué sur la fig.1-3

$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$

$V_X = V\cos\alpha$

$V_y = V\sin\alpha$

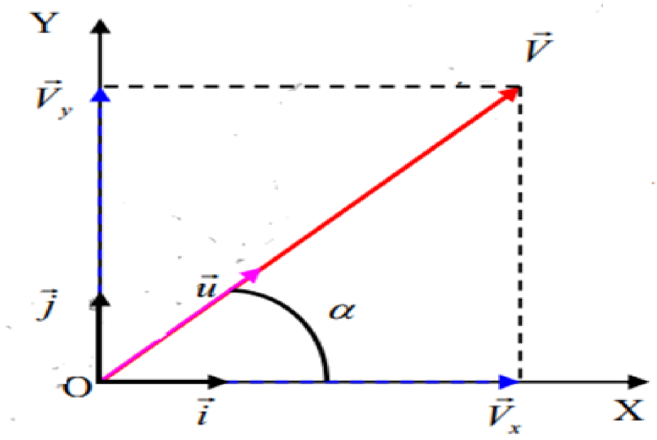


Fig.1.3 . coordonnées rectangulaires

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, respectivement dans les directions des

deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{V_x} = V_x\vec{\imath}$, $\overrightarrow{V_y} = V_y\vec{\jmath}$, $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$, $\vec{V} = V\cos\alpha\,\vec{\imath} + V\sin\alpha\,\vec{\jmath}$

$\vec{V} = V(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$ or $\vec{V} = V\,\vec{u}$, d'ou $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}$

Quant à la norme du vecteur $\vec{V}$ elle vaut :$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2}$ (I-13)

En utilisant les coordonnées x et y nous pouvons aussi écrire :

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad \text{(I-14)}$$

Exemple: Trouver la résultante des deux vecteurs $\vec{V}_1\binom{x_1}{y_1}$, $\vec{V}_2\binom{x_2}{y_2}$ dans le repère $R\,(o, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$

Réponse

$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$, $\vec{V} = (x_1 + x_2)\,\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} \Rightarrow V = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$

* Dans l'espace : dans le repère $R\,(O, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (base orthonormée), nous remarquons que: $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$ avec, $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$ (fig. I-4)

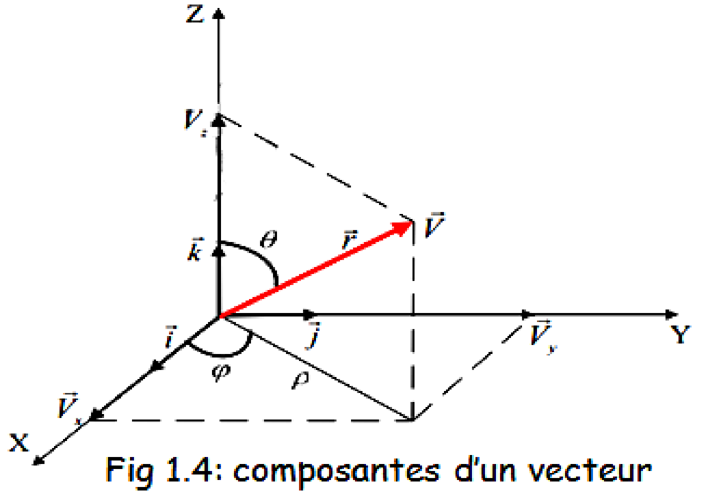


Fig 1.4: composantes d'un vecteur

Nous pouvons nous assurer géométriquement que :

$\cos\theta = \frac{V_Z}{r} \quad \Longrightarrow V_Z = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \Longrightarrow \rho = r\sin\theta$

$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Longrightarrow V_x = \rho\cos\varphi \Longrightarrow V_x = r\sin\theta\cos\varphi$

$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Longrightarrow V_y = \rho\sin\varphi \Longrightarrow V_y = r\sin\theta\sin\varphi$

En résumé :

$V_x = r\sin\theta\cos\varphi$

$V_y = r\sin\theta\sin\varphi$

$V_Z = r\cos\theta$

I.6. Produit scalaire entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$,leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire ,(Fig.I- 5)

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\cos\theta \qquad \text{(I-15)}$$

Tel que θ est l'angle entre les deux vecteurs, Ce produit admet quelque propriétés tel que : $\vec{i}.\vec{i} = 1$, $\vec{\mathrm{i}}.\vec{\mathrm{j}} = 0$

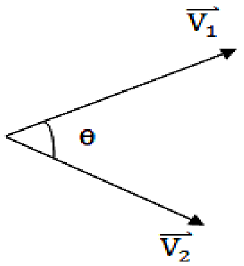


Fig.I-5: produit scalaire

I.7 .Produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ leur produit vectoriel est un vecteur orienté (Fig. I- 6) avec: $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \vec{V}$

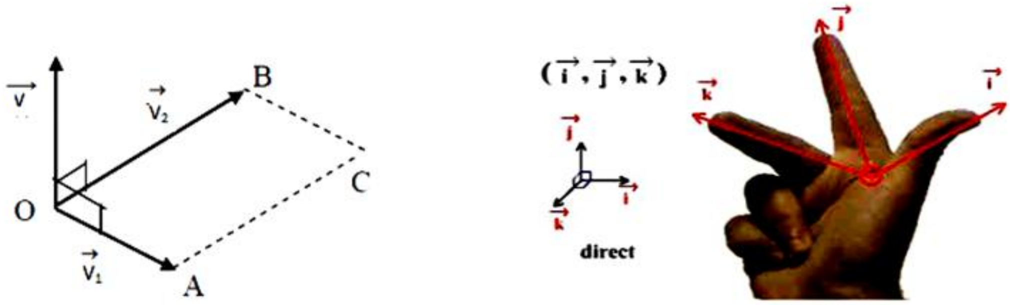


Fig.I-6: produit vectoriel

*la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

* le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite

* sa norme vaut : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\sin\alpha$ (I-16)

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

***Propriétés:** $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = 0,\ \ \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{\imath} + z_1x_2\vec{\imath} - x_1z_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 \ - y_1x_2)\vec{k}$$

il peut être aussi déterminer par la méthode du déterminant

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{\imath} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} \qquad \text{(I-17)}$$

I.8. Le produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ est la quantité scalaire définie par :

$$\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - y_3z_2)x_1 - (x_2z_3 - z_2x_3)y_1 + (x_2y_3 - y_2x_3)z_1 \qquad \text{(I-18)}$$

I. 9. Fonction à plusieurs variables

En Physique, nous avons souvent à étudier les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Nous nous limiterons à trois notées x , y *et* z mais les résultats sont facilement généralisable.

Soit une fonction $f\,(x, y, z)$, nous appellerons différentielle de f (notation df) . Il existe des fonctions algébriques et des fonctions vectorielles à plusieurs variables.

* Fonction algébrique à une seule variable, c'est une fonction qui ne dépend que d'une seule variable $y = f(x)$.

* Fonction à plusieurs variables qui dépendent de deux ou plusieurs variables.

$g = f(x, y)$ deux variables

$g = f(x, y, z)$ trois variables

Sa différentielle totale s'écrit

$$dg = df(x, y, z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} dz \qquad \text{(I-19)}$$

Exemple

Soit la fonction suivante $f(x, y, z) = x^2 - yz$

sa différentielle totale est : $df = 2xdx - zdy - ydz$.

On vient de définir des fonctions algébriques à plusieurs variables. Il existe aussi des fonctions vectorielles à plusieurs variables :

$\vec{V} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$.

I.10.Opérateurs

I.10.1. GRADIENT

C'est des grandeurs mathématiques qui agissent sur ces fonctions. L'opérateur Nabla qui est un vecteur qui agit sur les fonctions .

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad \text{(I-20)}$$

Lorsqu'il agit sur les fonctions algébriques, les transforme en fonctions vectorielles

$$\vec{\nabla}f\,(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{\nabla}f\,(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\,f\,(x,y,z)$

Et transforme les fonctions vectorielles en fonctions algébriques

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\,(f\,(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\,\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k})$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = div\vec{V}$$

*Si $f\,(x,z,y\,)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}.\vec{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Exemple : Calculer le gradient de la fonction $f\,(x\,,y\,,z) = 3x^2y^3z$

Réponse : $\overrightarrow{grad}\,f = 6xy^3\,z\,\vec{i} + 9x^2\,y^2\,z\,\vec{j} + 3x^2\,y^3\,\vec{k}$

I.10.2.LA DIVERGENCE

Si $\vec{V} = (V_X, V_Y, V_Z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_X}{\partial x} + \frac{\partial V_Y}{\partial y} + \frac{\partial V_Z}{\partial z}$ (I-21)

Exemple 2.7 : Calculer la divergence de la fonction vectorielle

$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\,\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$

Réponse : $div\vec{V} = 2y - 3z^2$

I.10.3.LE ROTATIONNEL

Si $\vec{V} = (V_X, V_Y, V_Z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant:

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_X}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_X}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad \text{(I-22)}$$

Démarche à suivre :

Etablir la matrice suivante

$$\overrightarrow{Rot\vec{V}} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = A + B + C$$

Exemple: Calculer le rotationnel du vecteur :

$\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\,\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$

Réponse : $\overrightarrow{rot\vec{V}} = (27xy^2 - 6yz)\vec{i} - 9y^3\,\vec{j} - 2x\,\vec{k}$

I.10.4. LE LAPLACIEN

I.10.4.1.Définitions :

En coordonnées cartésiennes le laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\,(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \vec{\Delta}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \text{(I-23)}$$

Chapitre II: Cinématique du point

II.1. Définition

La cinématique est l'étude des mouvements des masses, quantité de la matière, indépendamment des causes qui les engendrent.

II.2. Le point matériel

On entend par un point matériel, la matière qui est concentré en on centre de gravité, sans dimension géométrique dont on néglige le mouvement de rotation autour de soi-même.

II.3. Référentiel

Le mouvement d'un point est un concept relatif. En d'autres termes, on ne peut pas dire qu'un corps est "en mouvement" (ou "au repos") sans préciser par rapport à quoi. D'où la nécessité de définir un repère doté d'un chronomètre, pour connaitre la position du point par rapport à ce repère et l'instant correspondant à cette position (mesure du temps). Il s'agit d'un repère d'inertie qu'on nomme référentiel. Selon la nature du mouvement du point, sa position sera localisée par l'un des systèmes a savoir : cartésien, polaire, cylindrique ou sphérique.

II.4. Vecteur position

x est la projection de M sur l'axe (ox), y sur l'axe (oy) et z sur l'axe (oz), on les nomme les coordonnées de M, comme le point M est en mouvement donc sa position varie dans le temps ces coordonnées sont fonction du temps.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + Y\vec{j} + z\vec{K} \qquad \text{(II-1)}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{aligned}\right\}$$: Qu'on appelle les équations horaires. (II-2)

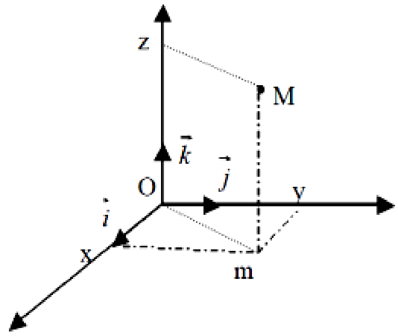


Fig.II-1: Vecteur position

II.5. Vecteur déplacement

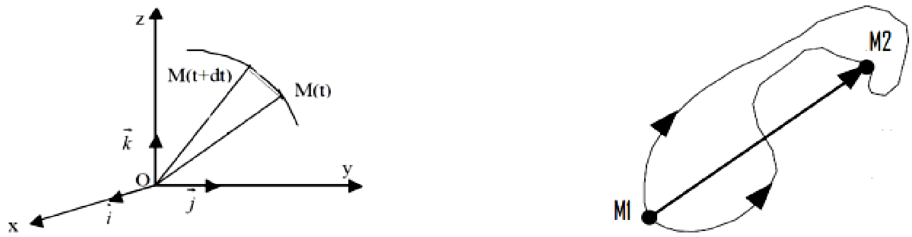


Fig.II-2: Vecteur déplacement

Soient deux points M_1 à l'instant t et un autre M_2 à l'instant $(t + dt)$, on (Fig. II-2) peut définir trois chemin différents entre ces deux points, qui correspondent au même vecteur. C'est le vecteur déplacement formé par l'origine M_1 et l'extrémité M_2 , qui défini un mouvement qui se fait du point M_1 au point M_2 : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| . \vec{U} \qquad \text{(II-3)}$$

$\vec{U}$: est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

II.6. Trajectoire

C'est l'ensemble des points occupés par un mobile à tous les instants. mathématiquement c'est une relation liant les coordonnés x, y et z entre eux indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différentes coordonnées ou équations horaires.

$y = f(x, z)$ ou $x = g(y, z)$ si non $z = h(x, y)$, (Fig.II-3)

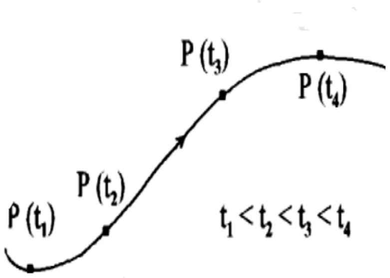


Fig.II-3: trajectoire

II.7. Vecteur vitesse

La vitesse est une grandeur qui caractérise un mouvement, c'est la variation de la position par rapport au temps. Par ailleurs, cette grandeur est vectorielle car le mouvement d'un point se caractérise par une direction et un sens. On distingue deux vitesses, une vitesse moyenne et une vitesse instantanée.

II.7.1. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la variation de la distance globale par rapport au temps écoulé. Un mobile qui se déplace d'el bayadh vers Saida par autoroute, il parcoure 400 km pendant 4 heures. On définit une vitesse moyenne de 100 km/h en module , d'Oran vers Alger en sens. Cette vitesse moyenne ne prend en considération que le point de départ et d'arrivé. En résumer le vecteur vitesse moyenne dans ce cas est définie par un module de 100Km/h, un support qui est l'autoroute et un sens d'El-Bayad vers Saida. Soit le point M_1 à l'instant t_1 et le point M_2 à l'instant t_2 .

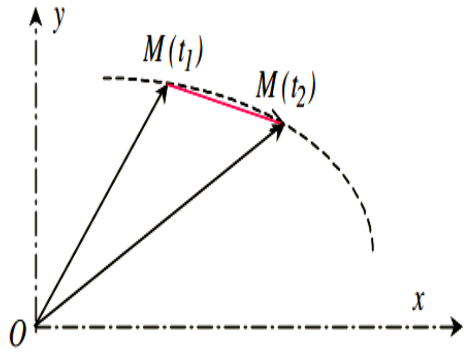


Fig.II-4: Vitesse moyenne

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad \text{(II-4)}$$

Avec $\Delta t = t_2 - t_1$

II.7.2. Vitesse instantanée

En réalité ce mouvement ne se fait pas à une vitesse constante, à chaque instant on aura une situation de la vitesse, on parlera de vitesse instantanée. C'est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence du temps est très petite cela veut dire qu'elle tend vers zéro.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

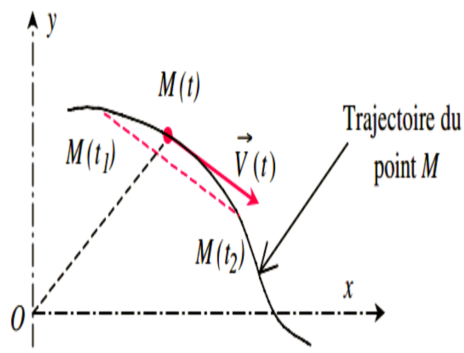


Fig.II-5: Vitesse instantanée

Soit une fonction $y = f(x)$, on appelle sa dérivée la quantité égale à

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ce n'est autre que la définition de la dérivée d'une fonction.

* Le vecteur vitesse est donc la dérivée du vecteur position par rapport au

temps. Il en résulte que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire .

Expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur vitesse du point M s'obtient en dérivant son vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Sa norme est $V = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$ (II-5)

Remarque: Le vecteur vitesse est donc toujours orienté dans le sens du mouvement : sur une trajectoire orientée, si le mobile se déplace dans le sens positif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens positif. Si le mobile se déplace dans le sens négatif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens négatif.

II.8.abscisse curviligne : On appelle abscisse curviligne à l'instant t, notée s(t) , d'un point matériel M, la longueur de l'arc de la trajectoire de M comptée à partir d'une origine Mo à to = 0 : (Fig. II-6) .

$$S(t) = S(M) = \widehat{M_0M(t)}$$

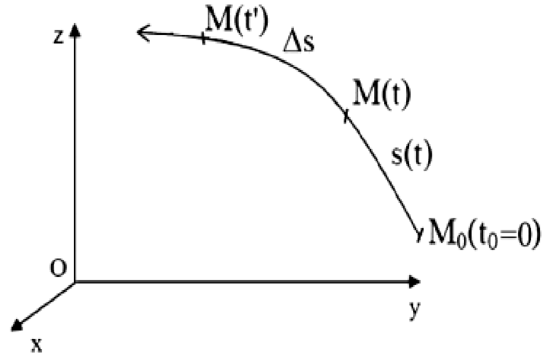


Fig.II-6: Abscisse curviligne

La longueur du déplacement ds est alors égale à :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \qquad \text{(II-6)}$$

En comparant cette expression avec la définition de la vitesse instantanée $V = \frac{ds}{dt}$, En intégrant, on définit ce qu'on appelle **l'abscisse curviligne**, qui sert à repérer la position de la particule le long de sa trajectoire. $s(t) = s_0 + \int_0^t V'(t)dt'$

Au temps : $t = 0$ $\quad s_0 = s(0)$

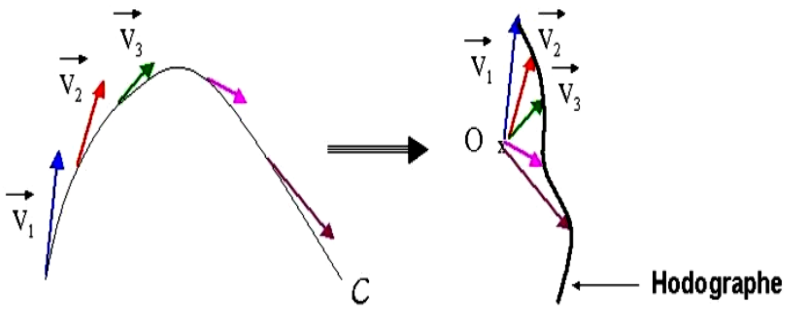
Au temps : $t = 1$ $\quad s_1 = s(1)$

Au temps : $t = 2$ $\quad s_2 = s(2)$

....

L'abscisse curviligne mesure donc la distance parcourue le long de la trajectoire. Sur une voiture, c'est le rôle du compteur kilométrique. La vitesse instantanée scalaire est donnée par le compteur de vitesse ou **tachymètre**. Le calcul mathématique de l'abscisse curviligne peut donner lieu parfois à des calculs difficiles, l'intégration n'étant pas toujours possible analytiquement.

II.9. Hodographe: L'hodographe est la trajectoire décrite par l'extrémité du vecteur vitesse au cours du temps par rapport à l'origine arbitraire O. C'est la trajectoire de l'extrémité du vecteur vitesse dans l'espace des vitesses.



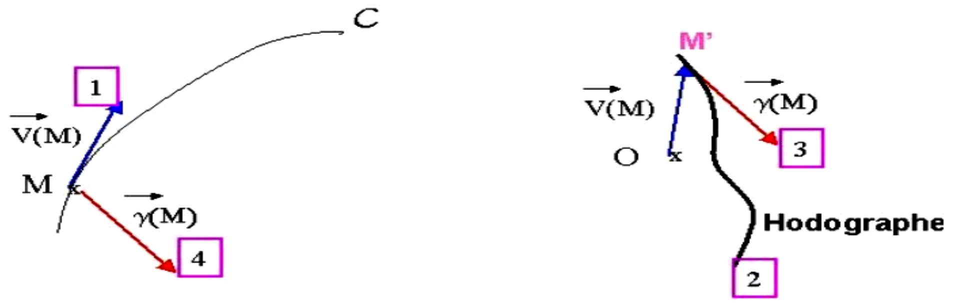
(Fig. II-7) - Représentation de l'hodographe

II. 10. Accélération

II.10.1 .Définitions

II.10.1.1.L'accélération moyenne: est $\vec{\gamma}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ (II-7)

II.10.1.2.L'accélération instantanée: est $\vec{\gamma}(M) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$ (II-8)



(Fig.II-8) – Etapes de la représentation de l'accélération

II.10.2. Expression du vecteur accélération

II.10.2.1.Expression vectorielle

Elle est donnée par : $\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\vec{u}_N = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_n$ (II-9)

$\vec{u}_T$: vecteur unitaire de la tangente directe au point $\mathbf{M}$, à la trajectoire orientée :

$\vec{u}_N$: vecteur unitaire porté par la normale principale au point M et orienté vers le centre de la courbure .

r: rayon de courbure de la trajectoire au point $\mathbf{M}$ à l'instant considéré.

On peut donc considérer comme étant la somme de deux vecteurs :

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T$ (accélération tangentielle) + $\vec{\gamma}_N$(accélération normale).

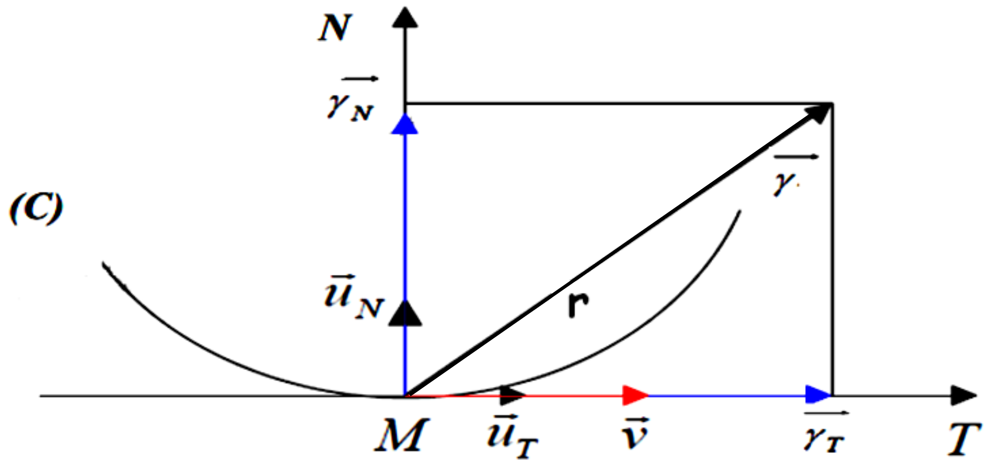


Fig.II-9: Expression vectorielle

Avec: * $\vec{\gamma}_T = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$: dérivée de la vitesse par rapport au temps

$\vec{\gamma}_N = \frac{v^2}{r}$ et $v^2 > 0\,,\ r > 0 \Rightarrow \vec{\gamma}_N$ est toujours dirigée vers le centre de la courbure de la trajectoire.

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N\,, \quad \vec{\gamma} = \gamma_T \vec{u}_T + \gamma_N \vec{u}_N\,, \quad \vec{\gamma} = \dot{v}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\vec{u}_N \qquad \text{(II-10)}$$

II.10.3. Cas particuliers

* $\vec{\gamma}_T = 0$ cela veut dire que $\frac{dv}{dt} = 0$ (mouvement uniforme), reste la composante normale.

* $\vec{\gamma}_N = 0$ cela veut dire que:

1) soit $v = 0 \longrightarrow$ point immobile

2) soit $r = \infty \longrightarrow$ trajectoire droite.

Il reste dans ce cas la composante tangentielle seulement.

Exemple:

Un corps se déplace selon l'axe des x suivant la loi $x(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$

x est en mètre et t en seconde. Trouver:

1- sa vitesse et son accélération à chaque instant ;

2- sa position, sa vitesse et son accélération pour $t = 2\,s$ et $t = 3s$

3- sa vitesse et son accélération moyennes entre $t = 2$ s et $t = 3$ s.

II.10.4.Détermination du rayon de courbure: on va faire le produit vectoriel entre l'accélération et la vitesse

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{V} = (\frac{dv}{dt}\,\vec{U}_T + \frac{v^2}{r}\vec{U}_N\,) \wedge V\,\vec{U}_T = \frac{V^3}{r}\,(\,\vec{U}_N\ \wedge\ \vec{U}_T)$$

Comme le produit vectoriel est un vecteur on prendra son module, ainsi on peut déduire le rayon de courbure $\left|\vec{\gamma} \wedge \vec{V}\right| = \frac{V^3}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{V^3}{|\vec{\gamma} \wedge \vec{V}|}$ (II-11)

On remarque que le rayon de courbure est une grandeur algébrique, il peut être calculer dans n'importe quelle base.

II.10.5. Accélération en coordonnées cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\vec{j} + z\,\vec{k}$

$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$,

$\gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \dot{v}_x$, $\quad \gamma_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \dot{v}_{y,}$ $\quad \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = \dot{v}_z$

$\gamma = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{\dot{v}_x{}^2 + \dot{v}_y{}^2 + \dot{v}_z{}^2}$ (II-13)

II.11. Mouvements rectilignes

II.11.1. Mouvement rectiligne uniforme

Déf. Un mouvement est dit rectiligne uniforme si la trajectoire est une droite et si la vitesse est constante.

II.11.2. Equation différentielle:

II.11.2. 1. Vitesse $\vec{v} = v_0\,\vec{i}$, $v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0$ (constant)

II.11.2. 2. Accélération

Déf. Un mouvement est dit uniformément accéléré si l'accélération est constante.

-Désignons l'accélération par $\vec{\gamma}$. L'accélération étant la dérivée seconde de la position, ou la première dérivée de la vitesse on trouve la vitesse en intégrant deux fois par rapport au temps $\vec{\gamma} = \vec{0}$

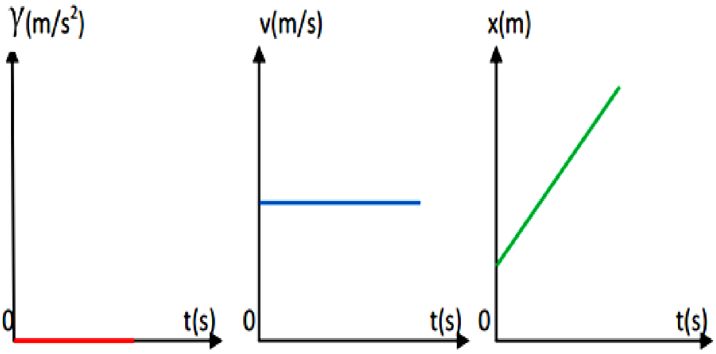


Fig.II-10: les diagrammes du mouvement

Intégration:

$$X(t) = \int v(t)dt = v_0 \int dt = v_0\, t + C$$

$$C = X(0) = X_0$$

II.11.2. 3. Equation horaire

$$X(t) = V_0 t + X_0$$

II.11.3. Mouvement rectiligne uniformément varie

✓ Rectiligne : mouvement en ligne droit (Trajectoire rectiligne : (x'Ox)
✓ Uniformément varie : à accélération constante

II.11.3.1.Accélération

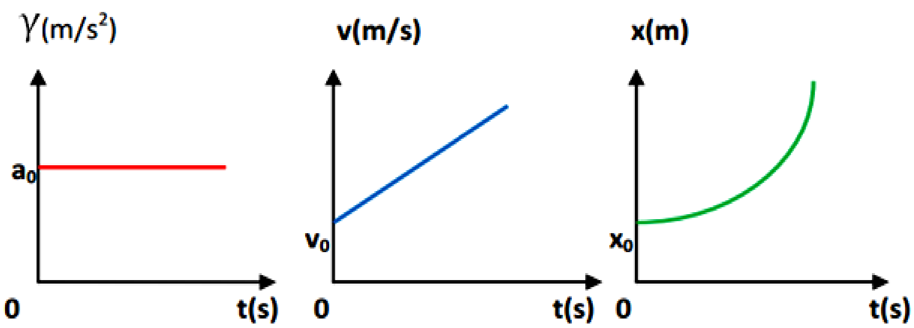


Fig.II-11: les diagrammes du mouvement

$$\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{i} \ , \ \gamma(t) = \frac{dv}{dt} = \gamma_0 \ \text{(constante)} \qquad \text{(II-14)}$$

II.11.3.2.Vitesse

Intégration:

$$v(t) = \int \gamma(t)dt = \gamma_0 \int dt = \gamma_0 t + C$$

$$C = v(0) = v_0, \quad v(t) = \gamma_0 t + v_0 \qquad \text{(II-15)}$$

II.11.3.3.Equation horaire

2ème intégration:

$$X(t) = \int v(t)dt = \gamma_0 \int tdt + v_0 \int dt = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + C'$$

$$C' = X(0) = X_0 \ , \qquad X(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + X_0 \qquad \text{(II-16)}$$

II.11.3.4.Relation caractéristique : $v^2 - {v_0}^2 = 2\gamma_0 (x - x_0)$ (II-17)

* $\vec{\gamma}.\vec{v} > 0 \Leftrightarrow$ mouvement accéléré

* $\vec{\gamma}.\vec{v} < 0 \Leftrightarrow$ mouvement retardé

II.11.4. Mouvement rectiligne a accélération variable

II.11.5.Définition : Le mouvement d'un point matériel est dit rectiligne à accélération variable si sa trajectoire est une droite et que son accélération est fonction du temps ($\gamma = f(t)$).

Exemple:

Un corps ponctuel se déplace suivant une droite avec l'accélération $\gamma = 4 - t^2$ (toutes les unités sont dans le système international MKSA).

Trouver les expressions de la vitesse et du déplacement en fonction du temps en considérant les conditions suivantes : $t = 3s$; $v = 2m.s^{-1}$; $x = 9m$

Réponse: Pour obtenir l'expression littérale de la vitesse on doit intégrer l'équation de l'accélération :

$$v(t) = \int \gamma(t)dt = \int (4 - t^2)dt = 4t - \frac{t^3}{3} + v_0$$

Intégrant de nouveau afin d'obtenir l'expression littérale du déplacement :

$$x(t) = \int v(t)dt = \int \left(4t - \frac{t^3}{3} + v_0\right)dt = -\frac{t^4}{12} + 2t^2 + v_0 t + x_0$$

Il nous reste à déterminer l'abscisse et la vitesse initiales du corps. D'après les données , on remplace dans les expressions obtenues précédemment le temps par t = 3s pour trouver l'abscisse et la vitesse initiales : $x_0 = \frac{3}{4}\,m$, $v_0 = -1\ m/s$

En fin de compte, les expressions de la vitesse et du déplacement sont:

$$v(t) = 4t - \frac{t^3}{3} - 1 \ ,\ x(t) = -\frac{t^4}{12} + 2t^2 + v_0 t + \frac{3}{4}$$

II.12. Le mouvement circulaire

Puisque $r = R = Cte$, le vecteur vitesse est donc : $\vec{V} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ (II-18)

Et l'expression du vecteur accélération est :$\vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ (II-19)

Remarquons que cette accélération a deux composantes :

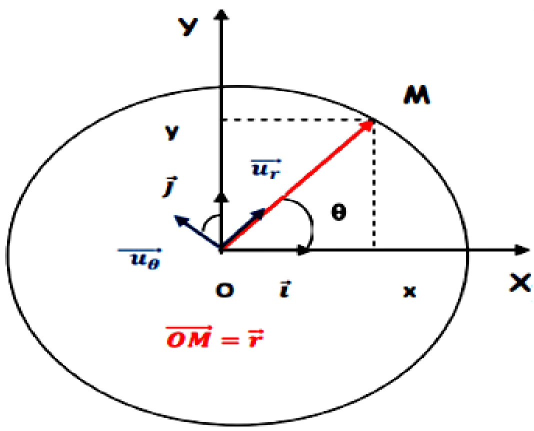


Fig.II-12: mouvement circulaire

II.12.1.Accélération normale: notée par ,$\vec{\gamma}_N$ portée par la normale, dirigée vers le centre , et de sens contraire à $\vec{\gamma}_T$, elle indique la **variation de la direction** de la vitesse.

$$\vec{\gamma}_N = -\vec{\gamma}_T = R\dot{\theta}^2\vec{u}_r \rightarrow \gamma_N = R\dot{\theta}^2 \qquad \text{(II-20)}$$

II.12.2. Accélération tangentielle: notée par $\vec{\gamma}_T$, portée par la tangente à la trajectoire au point M , elle indique la **variation du module** de la vitesse.

$$\vec{\gamma}_T = \vec{\gamma}_N = R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta \rightarrow \gamma_T = R\ddot{\theta} \qquad \text{(II-21)}$$

II.12.3. Le mouvement circulaire uniforme

Pour ce mouvement la vitesse est constante en module. Et puisque $r = R = Cte$, la vitesse est donc : $V = R\dot{\theta} = R.\omega$

ω: la vitesse angulaire qui représente l'angle balayé par unité de temps et dont l'unité est le radian par seconde (rad.s^{-1}) .

Equation horaire: $S = vt + S_0$
- Vitesse angulaire: $\dot{\theta} = Cte = \omega$
- Relation entre les deux vitesses : $V = R\dot{\theta} = R.\omega$
- Equation horaire angulaire: $\theta = \omega t + \theta_0$

(II-22a)

Quant à l'accélération elle vaut :

$$\gamma = \gamma_N = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{V^2}{R} \Leftrightarrow \vec{\gamma}_N = -R\omega^2\vec{u}_r \qquad \text{(II-22b)}$$

II.13. Mouvement rectiligne sinusoïdal

II.13.1 .Equation horaire

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(II-23)}$$

avec : x_m: L'amplitude , ω: La phase à l'origine.

Le mouvement rectiligne sinusoïdal est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

et une fréquence $N = \frac{1}{\mathbf{T}} = \frac{\omega}{2\pi}$ (II-24)

II.13.2. Vitesse: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_m\omega \sin(\omega t + \varphi)$ (II-25)

II.13.3. Accélération: $\gamma(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$ (II-26)

II.13.4. Relation caractéristique:

$$\ddot{x} = -x_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{(II-27)}$$

II.13.5. Les diagrammes du mouvement : La (Fig. II-13) suivante représente les diagrammes du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal (pour simplifier nous avons choisi $\varphi = 0$)

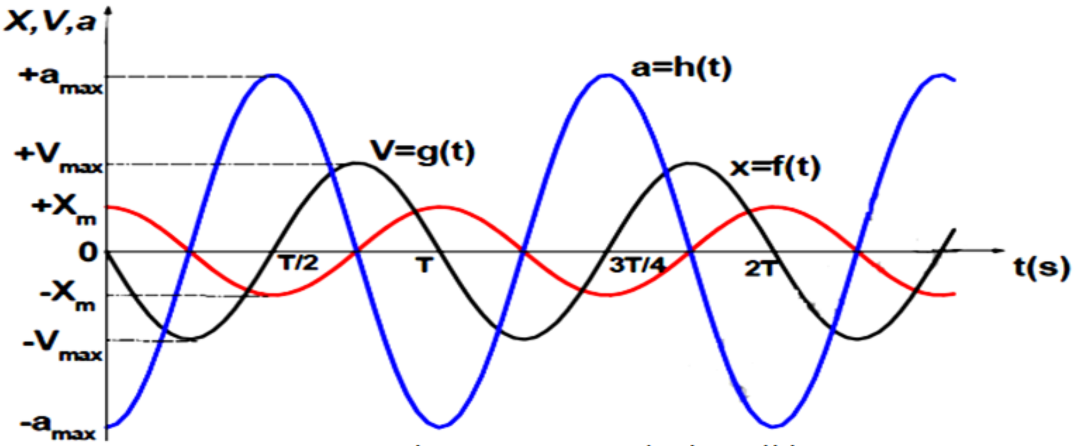


Fig.II-13: la vitesse et de l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal

II.14. Mouvement hélicoïdal

Si la trajectoire est porté par une hélice circulaire, le mouvement est dit **hélicoïdal**. (Fig. .II-14)

La position de $\mathbf{M}$ à l'instant t est repéré par :

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \\ z &= h\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(II-28)}$$

h est appelé **pas de l'hélice** ; θ varie entre 0 et 2π.

D'après la figure et par des dérivations on obtient.

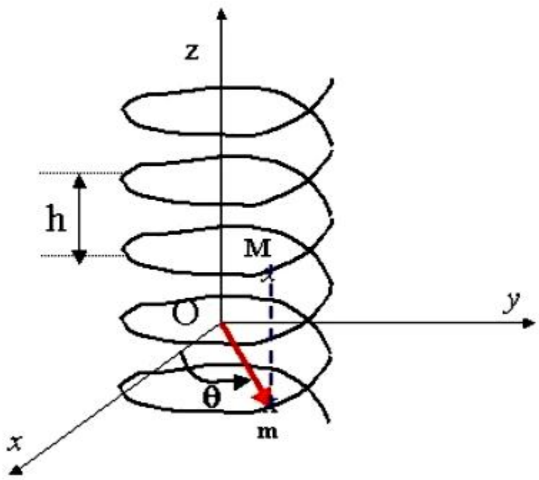


Fig.II-14: Mouvement hélicoïdal

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = R\,\vec{u}_r + z\,\vec{K}$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\,\vec{u}_r + z\,\vec{K})}{dt} = r\omega\,\vec{u}_\theta + h\omega\,\vec{K}$ avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (dans le cas d'un Mouvement uniforme $\omega = cte$). D'ou $\|\vec{V}\| = \omega\sqrt{R^2 + h^2}$ (II-29)

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\,\vec{u}_\theta - R\omega^2\,\vec{u}_r + h\frac{d\omega}{dt}\,\vec{K} \qquad \text{(II-30)}$$

$$\gamma_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\sqrt{R^2 + h^2} \qquad \text{(II-31)}$$

$$\gamma^2 = R^2\left(\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4\right) + h^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \qquad \text{(II-32)}$$

$$\gamma_N = R\omega^2 \qquad \text{(II a-33)}$$

Le mouvement hélicoïdal est uniforme si $\vec{\gamma}_T = 0$. Dans ce cas l'accélération est axipète (dirigée vers l'axe) : $\vec{\gamma}_N = -R\omega^2\,\vec{u}_r$ (II b-33)

II.15. Mouvement dans le plan

II.15.1. Vitesse en coordonnées polaires

D'après la (Fig. II-15), on' a $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

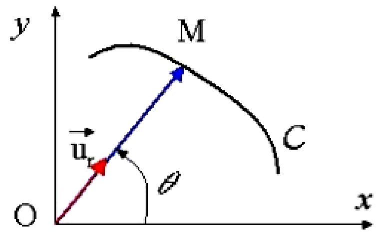


Fig. II-15 :vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Comme $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$, on' a: $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\,\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$

$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta$ or

$\vec{V}_r = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r = \dot{r}.\vec{u}_r \quad \Rightarrow$ composante radiale

$\vec{V}_\theta = r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,r\,\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow$ composante transversale

$$\vec{V} = \dot{r}.\vec{u}_r + \dot{\theta}\,r\,\vec{u}_\theta \;, V = \sqrt{{V_r}^2 + {V_\theta}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} \qquad \text{(II-34)}$$

15.2. Vitesse en coordonnées cylindriques:

En coordonnées cylindriques,(Fig :II-16) ,on' a : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\vec{k}$ avec

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

Comme $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} = \vec{u}_\varphi$, donc: $\vec{V} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ (II-35)

II.15.3. L'accélération

II.15.3.1. Accélération en coordonnées polaires

On 'a la relation $\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u}_r + \dot{\theta}\, r\, \vec{u}_\theta$ Nous dérivons la relation de la vitesse par rapport au temps ,on obtient :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{\theta}\, r\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$= \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \ddot{r}\,\vec{u}_r - r\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \quad \text{(II-36)}$$

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_\theta$ ou $\vec{\gamma}_T = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r$ ⇒composante radiale

$\vec{\gamma}_\theta = \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$ ⇒ composante transversale

Le module de l'accélération $\gamma = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)^2}$ (II-37)

II.15.3.2. Accélération en coordonnées cylindriques

II.15.3.2.a. Position du mobile

La position du mobile $\mathbf{M}$ est indiquée par sa coordonnée algébrique Z et ses deux coordonnées polaires ρ et φ

de sa projection $\mathbf{m}$ sur le plan XOY

est $\overline{OM}\begin{cases}\rho(t)\\ \varphi(t)\\ z(t)\end{cases}$.

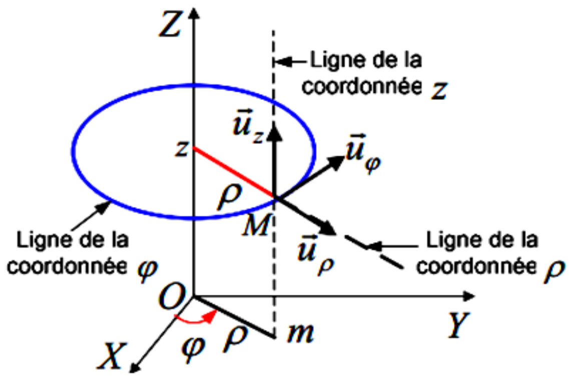


Fig.II-16: Base des coordonnées cylindriques

Les relations entre les vecteurs de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$\vec{u}_\rho = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j}$, $\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$, $\vec{u}_z = \vec{k}$

Le vecteur position s'écrit donc : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$

$$\overrightarrow{OM} = \rho.\cos\varphi.\vec{i} + \rho.\sin\varphi.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Le déplacement élémentaire est donné par l'expression :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \qquad \text{(II-38)}$$

II.15.3.2.b. Vitesse du mobile

Il suffit de dériver le vecteur position, exprimé en coordonnées cylindriques, par rapport au temps, pour tomber sur le vecteur vitesse. Remarquons que le rayon polaire ρ est une fonction du temps. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ est lui aussi variable avec le temps. Seul $\vec{u}_z = \vec{k}$ est constant.

$$\vec{r} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{u}_\rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

la relation relative aux dérivées de $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$ nous pouvons écrire :

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{z}\,\vec{u}_z \qquad \text{(II-39)}$$

Remarquons que la vitesse a trois composantes: **radiale** ($\vec{V}_r$), **transversale** ($\vec{v}_\varphi$) et **azimutale** ($\vec{V}_z$) .

Le module de la vitesse en coordonnées cylindriques est donné par l'expression : $V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$ (II-40)

II.15.3.2.c. Accélération du mobile

En continuant l'opération de dérivation par rapport au temps nous arrivons à l'expression de l'accélération du mobile :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\,\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

En utilisant la notation de Newton , et en se rappelant de la relation

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta\,\frac{d\theta}{dt} \qquad , \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r\,\frac{d\theta}{dt}$$

nous obtenons l'expression finale de l'accélération exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi})\vec{u}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{u}_z \qquad \text{(II-41)}$$

La même expression peut être écrite sous la forme :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\,\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{u}_z \qquad \text{(II-42)}$$

Si: $z = 0$ et $\rho = R = c^{te}$, l'accélération du mouvement circulaire uniforme.

Remarquons que l'accélération, comme la vitesse, a trois composantes : **radiale** (γ_r) , **transversale** (γ_φ) et **azimutale**(γ_z).

II.15.4. Etude du mouvement en coordonnées sphériques

II.15.4.1. Position du mobile

Dans ce système la position du mobile est définie par la relation :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{cases}$$

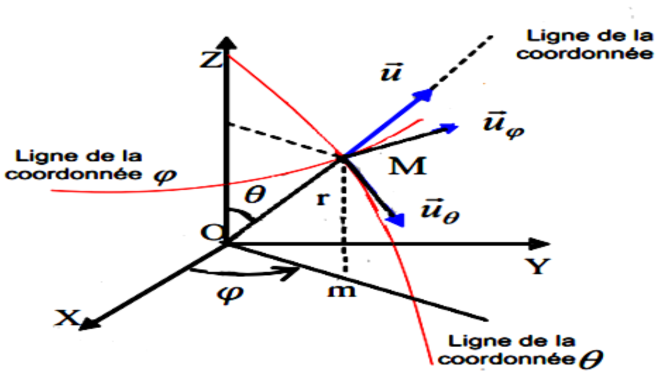


Fig.II-17: Base des coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

$(\varphi)) = (OX, Om)$, $(\theta) = (OZ, OM)$

Rappelons les deux relations entre les vecteurs de $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont ;

$$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\ \vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

Le déplacement élémentaire est donné par la relation :

$$ds^2 = dr^2 + (r\sin\theta . d\varphi)^2 + (rd\theta)^2 \qquad \text{(II-43)}$$

II.15.4.2.Vitesse du mobile

Dérivons le vecteur position en coordonnées sphériques par rapport au temps : $\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r$

Dérivons le vecteur $\dot{\vec{u}}_r$, puis organisons la nouvelle expression pour obtenir à la fin :

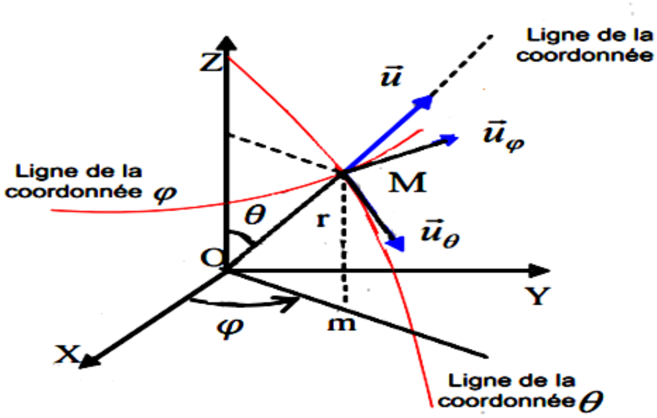


Fig.II-17: Base des coordonnées sphériques

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\underbrace{[\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{K}}_{\vec{u}_\theta}] + \dot{\varphi}\sin\theta\underbrace{[-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}]}_{\vec{u}_\varphi}$$

C'est-à-dire : $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\ \sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

Par remplacement on obtient l'expression finale de la vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{V} = \dot{r}\ \vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + (r\sin\theta)\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \qquad \text{(II-44)}$$

Les trois composantes sphériques du vecteur vitesse apparaissent clairement :

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta + \vec{V}_\varphi \Rightarrow \vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{u}_\varphi \qquad \text{(II-45)}$$

La base orthogonale directe est constituée des vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ qui dépendent de la position du mobile, donc du temps. Elle est définie par les équations horaires $r(t), \theta\,(t)\,, \varphi(\,t)$, qui nous permettent d'arriver aux valeurs algébriques v_r, v_θ, v_φ des composantes sphériques du vecteur vitesse et de là, la détermination du vecteur vitesse.

II.15.4.3.Accélération du mobile :

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps, équation (II-45) on arrive à l'expression du vecteur accélération, soit :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{r}\,\vec{u}_r + (r.\sin\varphi)\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r.\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi]$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_\theta + \vec{\gamma}_\varphi = \sqrt{{\gamma_r}^2 + {\gamma_\theta}^2 + {\gamma_\varphi}^2} \qquad \text{(II-46)}$$

Nous donnons ci après l'expression finale du vecteur accélération:

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \left(r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta\right)\vec{u}_\theta + (r\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}.\cos\theta)\vec{u}_\varphi \qquad \text{(II-47)}$$

Là aussi, connaissant les équations horaires $r(t), \theta\,(t)\,, \varphi(\,t)$, on arrive aux expressions algébriques $\gamma, \gamma_\theta, \gamma_\varphi$ des composantes du vecteur accélération et par conséquent à la détermination du vecteur $\vec{\gamma}$.

II.15.4.4. Applications

Exercice 01

Les coordonnées polaires d'un point en mouvement sont : $\overrightarrow{OM} = +r\,\vec{u}_r$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, $\vec{u}_r$ étant le vecteur unitaire de l'axe $\overline{OM}$.

1. Quelles sont les composantes radiales et tangentielles de la vitesse $\vec{v}$?

2. Quelles sont les composantes radiales et tangentielles de l'accélération $\vec{\gamma}$?

Exercice 02

Une sphère de rayon R est mise en rotation à la vitesse angulaire constante ω, autour d'un axe (Δ) passant par son centre O.

1. Déterminer la vitesse linéaire v d'un point M situé sur la sphère à latitude λ (angle entre OM et le plan équatorial de la sphère) ;

2. En déduire le module de l'accélération γ du point M.

3. Application numérique. Calculer V et γ dans le cas où le point M est un point situé sur la surface de la terre (la terre étant assimilée à une sphère de centre O et de rayon R). On donne R= 6380 km, λ=45° et période de révolution de la terre, T=24 h.

II.16. Mouvements relatifs

II.16.1. Changement du système de référence

II.16.1. 1. Composition des mouvements (mouvement relatif)

Considérons : un repère S, matérialisé par un trièdre $Oxyz$.

- un repère S_1, matérialisé par un trièdre $O_1x_1y_1z_1$ en mouvement par rapport à S.

- un point M, en mouvement, défini par x, y, z dans le repère S et par $x_1y_1z_1$ dans le repère S_1

Par changement de coordonnées on peut passer du mouvement de M par rapport à S_1 au mouvement de $\mathbf{M}$ par rapport à S.

Il suffit d'appliquer la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OO}_1} + \overrightarrow{\mathrm{MO}_1} \qquad \text{(II-48)}$$

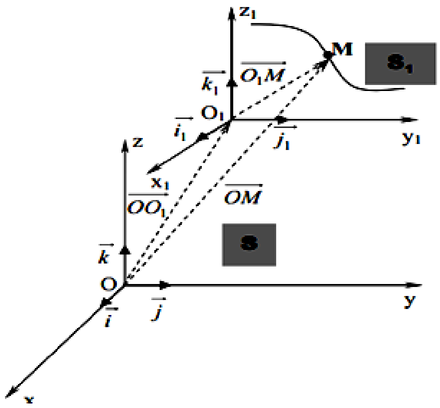


Fig.II-18: Composition des mouvements (mouvement relatif)

Pour étudier un mouvement bien défini, on utilise les définitions suivantes :

* le trièdre Oxyz (repère S) est le repère absolu ou référentiel absolu ;
* le trièdre $\mathrm{O}_1\mathrm{x}_1\mathrm{y}_1\mathrm{z}_1$ (repère S_1) est le repère relatif ou référentiel relatif
* le mouvement du point M par rapport à « S » s'appelle mouvement absolu .
*le mouvement du point M par rapport à « S_1 » s'appelle mouvement relatif
* le mouvement de «S_1» par rapport à « S » s'appelle mouvement d'entraînement .

II.16. 2. Compositions des vitesses

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OO}_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{M}}$, $\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{a}$: vitesse absolue du point M,

$$\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OO}_1}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{M}}}{\mathrm{dt}} \qquad \text{(II-49)}$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{M}} = \mathrm{x}_1\vec{\mathrm{i}}_1 + \mathrm{y}_2\vec{\mathrm{j}}_2 + \mathrm{z}_3\vec{\mathrm{k}}_3$

dans le repère S_1 il vient

$$\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{a} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OO}_1}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{x}_1\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{i}}_1}{\mathrm{dt}} + \mathrm{y}_1\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{j}}_1}{\mathrm{dt}} + \mathrm{z}_1\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{k}}_1}{\mathrm{dt}}}_{\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{e}} + \underbrace{\frac{\mathrm{dx}_1}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{i}}_1 + \frac{\mathrm{dy}_1}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{j}}_1 + \frac{\mathrm{dz}_1}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{k}}_1}_{\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{r}}$$

donc : $$\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{a} = \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{e} + \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{r} \qquad \text{(II-50)}$$

avec :

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} \qquad \text{(II-51)}$$

$$\vec{V}_r = \frac{dx_1}{dt}\,\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\,\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\,\vec{k}_1 \qquad \text{(II-52)}$$

Cas particuliers

* si les repères S et S_1 sont fixes alors $\vec{V}_e = 0$ et $\vec{V}_a = \vec{V}_r$

* si le repère S_1 est en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à S, alors $\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}$

Remarque

La dérivée d'un vecteur unitaire :$\frac{d\vec{u}}{dt}$ est obtenu par : $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \wedge \vec{u} = \vec{\omega}\wedge\vec{u}$

, $\frac{d\theta}{dt}$: vitesse angulaire

De ce fait, la vitesse d'entraînement s'écrira alors :

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1(\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1) + y_1(\vec{\omega}\wedge\vec{j}_1) + z_1(\vec{\omega}\wedge\vec{k}_1) + \vec{\omega}\wedge[x_1\vec{i}_1 + y_2\vec{j}_2 + z_3\vec{k}_3]$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

II.16.3. Compositions des accélérations

$$\vec{\gamma}_a = \frac{\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}[\frac{d\overline{oo}_1}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}] + \frac{d}{dt}[\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{oo}_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{oo}_1}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1}_{\vec{\gamma}_e} + \underbrace{\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1}_{\vec{\gamma}_r}$$

$$\underbrace{+2\left[+\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right]}_{\vec{\gamma}_c}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c \qquad \text{(II-53)}$$

γ_e: accélération d entraînement, γ_r : accélération relative

γ_c : accélération complémentaire ou accélération de Coriolis

Remarque

En utilisant le fait que $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{u}$, l'accélération de Coriolis devient:

$$\vec{\gamma}_c = 2\left[+\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right]$$

$$= 2\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{\omega}\wedge\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{\omega}\wedge\vec{k}_1\right)$$

$$= 2\vec{\omega}\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}x_1 + \frac{d\vec{j}_1}{dt}y_1 + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}z_1\right) = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r \qquad \text{(II-54)}$$

L'accélération d'entraînement devient :

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{oo_1}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2 z_1}{dt^2}$$
$$= \frac{d^2\overrightarrow{oo_1}}{dt^2} + x_1\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1) + y_1\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{j}_1) + z_1\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{k}_1)$$
$$= \frac{d^2\overrightarrow{oo_1}}{dt^2} + x_1\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{i}_1 + x_1\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{j}_1 + y_1\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{j}_1}{dt} + +z_1\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$
$$\wedge\vec{k}_1 + z_1\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{oo_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1\right) + \vec{\omega}\wedge(x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt})$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{oo_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM_1} + \vec{\omega}\wedge\left(x_1\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1 + y_1\vec{\omega}\wedge\vec{j}_1 + z_1\vec{\omega}\wedge\vec{k}_1\right)$$
$$= \frac{d^2\overrightarrow{oo_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}\wedge\left[\vec{\omega}\ \wedge\left(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{oo_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}\wedge\left[\vec{\omega}\ \wedge\overrightarrow{O_1M}\right] \qquad \text{(II-55)}$$

II.16.4. Applications

Exercice :01

le point M est animé dans le référentiel
lie au repère (OXY) d'un mouvement
uniforme de vitesse $\vec{V_0}$ et de direction OY;
la distance OO étant constante .L'axe (OX)
tourne à la vitesse angulaire ω autour du référentiel $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$supposé fixe, (FIG.1).
1- Déterminer la position de M dans $(0,\vec{i},\vec{j})$.Exprimer alors la vitesse puis l'accélération de M dans ce même repère?
2-Vérifier les formules de composition des vitesses et des accélérations?

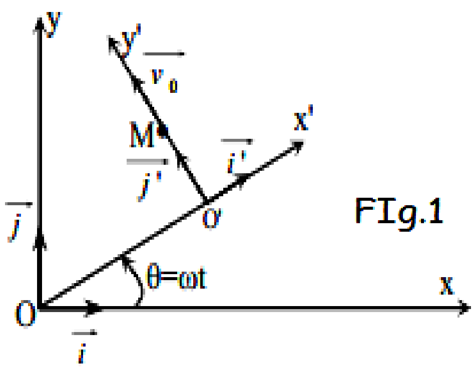


FIg.1

Chapitre III: Dynamique du point

III.1. Système matériel

Définition : nous appellerons système matériel un ensemble de points matériel.

Il existe deux sortes de systèmes matériels :

- Système matériel indéformable : solide
- Système matériel déformable : tous les systèmes ne correspond pas à la définition d`un solide.

III.1.1 .Masse et système d`inertie

la masse d`un système caractérisé la quantité de matière qu`il renferme.

Le centre d`inertie d`un système ou centre de gravitation correspond au point note G, barycentre des points matériels affectes de leurs masse

$$\sum_i m_i \overrightarrow{Gm_i} = \vec{0} \quad ,\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{Om_i}}{\sum_i m_i} \Rightarrow m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{Om_i} \qquad \text{(III-1)}$$

III.1.2. Le vecteur force

Toute force peut être représentée par un vecteur ($\vec{F}$) dont les quatre propriétés sont:

•la direction : droite selon laquelle l'action s'exerce (celle du fil de la Figure III.1) ,

• le sens : sens selon lequel s'exerce l'action (de A vers B, voir Figure III.1) ,

• le point d'application : point où l'action s'exerce sur le corps (le point A)

• le module : l’intensité de la force à laquelle est associée une unité adéquate.

Les forces sont additives, c'est-à-dire que si N forces agissent simultanément sur un corps, le mouvement de ce dernier est le même que dans le cas où il subit l'action d'une seule force égale à la somme vectorielle des N forces. Cette somme est appelée résultante des N forces.

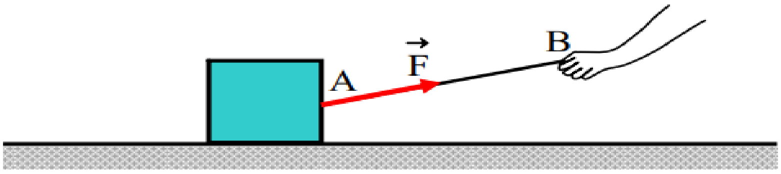


Fig.III-1: vecteur force

III.1.1.3. Vecteur quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement d`un point matériel de masse m se déplacent avec une vitesse $\vec{V}$ est donne par : $\vec{P} = m\vec{V}$. (III-2)

Le vecteur quantité de mouvement d`un système matériel est égal au vecteur quantité de mouvement d`un point matériel fictif confondu avec le centre d`inertie du système ou serait concentrée la masse totale du système.

III.2 .Interaction et forces

Une interaction entre deux corps se manifeste par une attraction ou une répulsion entre les corps considères

III.2.1 .Interaction de gravitation

Newton a déduit des observations astronomiques, dues en particulier a Copernic et Kepler, une loi de force pour la gravitation, responsable de l`attraction observée entre les corps célestes : La masse M subit de la part de la masse m , située à la distance d, (Figure .III-2), la force attractive :

$$\vec{F} = -\frac{M.m}{d^2}\vec{u}_r \qquad \text{(III-3)}$$

Ou $\vec{u}$ est le vecteur unitaire oriente de M vers m.

$G = 6.67210^{-11}$ S.I . Est la constante d`attraction universelle.

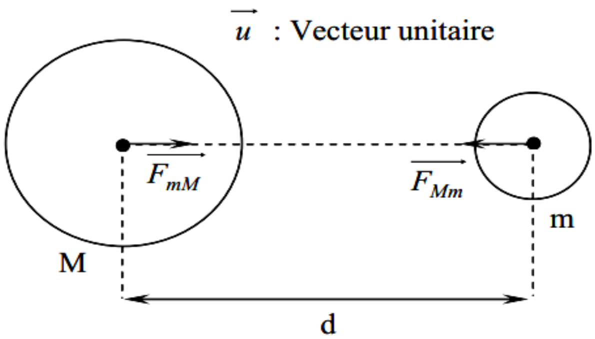


Fig.III-2: Interaction de gravitation

III.2.2. Interaction électromagnétique

Elle est représentée par les forces électrostatiques et par les forces magnétiques : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ (III-4)

Les forces électrostatiques qui s`exercent entre deux charges suivent la loi de Coulomb, (Figure .III-3), tout a fait similaire a celle de la gravitation :

$$\vec{F} = K\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{(III-5)}$$

ou $K = \frac{1}{4\pi\mathcal{E}_0} = 9.10^9$ S.I, est la constante universelle électrostatique.

Les forces électrostatiques sont répulsives si les charges sont de mêmes signes ou de mêmes nature, ou attractives si elles sont de signe contraires ou de nature différente. Les forces magnétiques d`interaction entre deux courants sont elles aussi inversement proportionnelles au carre de la distance.

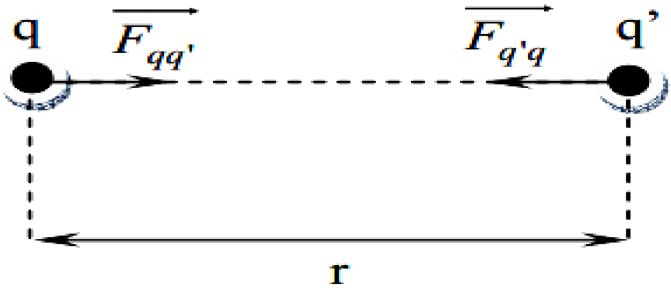


Fig.III-3: Interaction électromagnétique

III.2.3. Interaction faible

Interaction faible se manifeste entre certaines particules élémentaires les leptons et a une portée très faible à l'échelle sub-nucléaire.

III.2.4 .Interaction forte

L`interaction forte s`oppose a la répulsion électrostatique entre les proton du noyau atomique et en assure la cohésion.

III.2.5.Poids d'une masse

Soit une masse ponctuelle m, en interaction gravitationnelle avec la terre. (figure. III-4) ,Cette dernière agit sur la masse avec une force qu'on appelle poids de la masse et qui a pour expression: $\vec{P} = m\vec{g}$ (III-6)

.

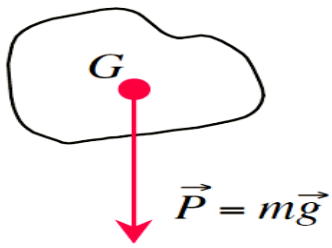


Fig.III-4: Poids d'une masse

III.3: Les trois lois de Newton

Ces lois sont valables dans les référentiels galiléens.

1re loi : Principe d`inertie

Si un corps n`est soumis a aucune force :

* S`il est au repos, il reste au repos .

*S`il est en mouvement, ce mouvement ne peut être que rectiligne et uniforme.

2eme loi : Principe Fondamentale de la Dynamique P.F.D

La résultante des forces qui s`exercent sur un corps est égal au produit de sa masse par son accélération $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$ (III-7)

3eme loi : principe de l`action et la réaction

Lorsque deux corps interagissent, la force exercée par le premier sur le second est égal et opposée a la force exercée par le second sur le premier.

III.4 .Théorie de la variation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d`un point matériel est définie par :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad , \ \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \ , \overrightarrow{\Delta p} = \vec{p} - \overrightarrow{p_0} = \int_{t_0}^{t} F\,dt \qquad \text{(III-8)}$$

La variation de la quantité de mouvement est égale a l`impulsion de la force appliquée Si un corps n`est soumis a aucune force, on a:

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{O} \ \Rightarrow \vec{p} = mv_0$ (Sa quantité de mouvement se conserve)

*** Enonce de la troisième loi:** Soit deux corps 1 et 2 soumis seulement a leur interaction mutuelle et constituant ainsi un système isole, (figure. III-5)

$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{21}$, $\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (La quantité de mouvement du système des deux corps se conserve) (III-9)

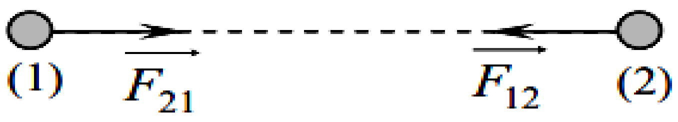


Fig.III-5: la variation de la quantité de mouvement

III.5. Mouvement d'un projectile dans le champ de gravitation terrestre

Tous les projectiles qui tombent en chute libre au voisinage de la terre ont la même accélération $\vec{g}$ constante qui est dirigée vers le bas. On peut écrire $\vec{g}$ sous la forme : $\vec{g} = -g\,\vec{j} = -9.8\ (m.s^2)$

$\vec{j}$: étant le vecteur unitaire de l'axe vertical dirigé vers le haut. On peut prédire le mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse initiale faisant un angle avec l'horizontale. Nous avons pris connaissance dans l'enseignement secondaire que l'étude porte essentiellement sur la détermination:

* Des composantes de la vitesse

$$\left.\begin{aligned} V_x(t) &= V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_y(t) &= -gt + V_{0y} = -gt + V_0 \sin\alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{(III-10)}$$

* Des deux équations horaires :

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = V_0\cos\alpha \;.t, (t = 0, x = 0) \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha + y_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad \text{(III-11)}$$

*De l'équation de la trajectoire : obtenue par élimination du temps entre les équations horaires précédentes

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0{}^2\cos^2\alpha}.x^2 + (\mathrm{tg}\alpha) + y_0 \qquad \text{(III-12)}$$

*L'apogée ou hauteur maximale atteinte par le projectile :

$$y_{max} = h = -\frac{V_0{}^2\sin^2\alpha}{2g} \quad (g < 0) \qquad \text{(III-13)}$$

*La portée : $X_{max} = h = -\frac{V_0{}^2\sin 2\alpha}{g} \quad (g < 0)$ (III-14)

Exemple:

Un projectile est lancé verticalement vers le haut, à partir du sol, avec la vitesse ($10 \,.\, m\, s^{-1}$)

a/ Quelle est la hauteur atteinte par le projectile ?

b/ quelle est la vitesse du projectile après 1.5s depuis le lancement ?

c/ quelle est l'intervalle de temps séparant l'instant du lancement et l'instant de collision du projectile avec la terre ?

III.6. Forces de contact

III.6.1. Réaction du support

La force que subit un objet, posé sur un support horizontal, en provenance du support s'appelle réaction du support. La réaction du support sur l'objet m est répartie sur toute la surface de contact support-objet.

$\overrightarrow{R}_n$: représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

* L'objet étant en équilibre $\vec{p} + \overrightarrow{R_n} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = -\overrightarrow{R_n}$ (III-15)

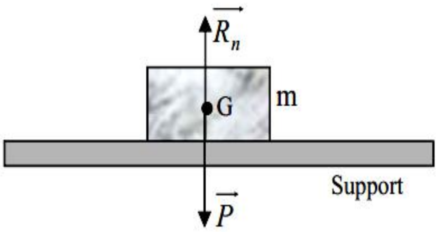


Fig.III-6: Forces de contact

III.6.2. Forces de frottement

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet, soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement. Il y a deux types de frottement:

1) frottement visqueux (contact solide-fluide)

2) frottement solide (contact solide-solide)

III.6.2.1. Frottement visqueux

Dans ce type de frottement la force est proportionnelle à la vitesse, Figure(III-7).

$\vec{F} = -k.\vec{v}$: force de frottement, (III-15) , k :constante positive.

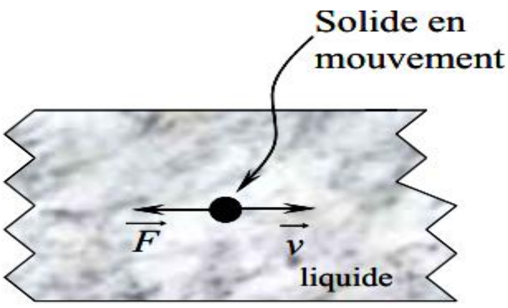


Fig.III-7: force de Frottement visqueux

III.6.2.2. Frottement solide

Dans cette Figure(III-8), le bloc solide est en mouvement sous l'action de la force d'entraînement $\vec{F}_e$

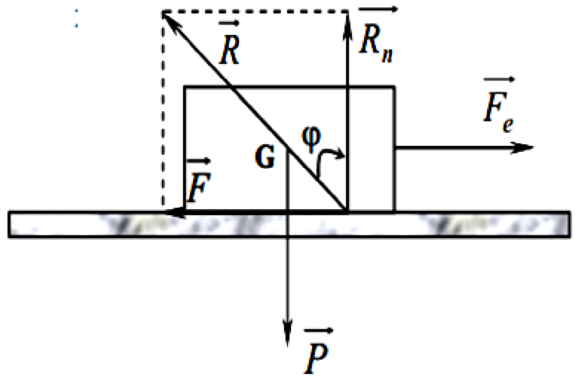


Fig.III-8: force de Frottement solide

* $\vec{F}_e$: Force d'entraînement.

$\vec{R}_n$: Force de réaction ,

$\vec{F}$: Force de frottement, φ: angle de frottement, $F = \mu R_n$ en module avec : μ coefficient de frottement ou coefficient de friction : c'est une constante qui dépend de la nature de la surface de contact.

On a $\frac{F}{R_n} = \text{tg}\,\varphi$

$\vec{F}$ est maximale quant sous l'action de $\vec{F}_e$ le corps solide est toujours en équilibre (pas de mouvement). A partir de cette valeur, si $\vec{F}_e$ augmente, le corps solide bouge de sa position d'équilibre.

Condition d'équilibre : $R_n = p$ et $F_e = F \Rightarrow \frac{F}{R_n} = \text{tg}\,\varphi = \frac{F}{p}$ (III-16)

III.7. Forces de tension

Force de tension ou force de rappel. L'exemple le plus simple est la force de rappel du ressort.(Figure. III-9)

$F = -k(l - l_0)$ (III-17)

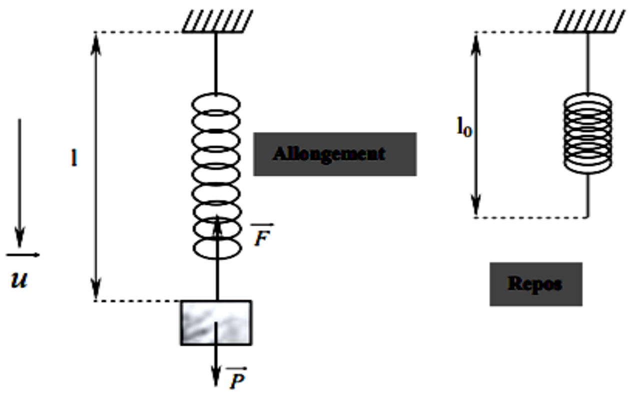


Fig.III-9: Forces de tension

k : coefficient d'allongement (coefficient de raideur du ressort)

III.8. Moment d'une force:

Soit la (figure III-10) où Δ est un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$,Δ et $\vec{u}$ sont de même sens. Soit O un point de cet axe :Définition :

On appelle moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M par rapport à l'axe Δ la grandeur scalaire : $\tau = \vec{\tau}_0\,\vec{u}$, Avec $\vec{\tau}_0$ le moment de la force $\vec{F}$ au point O .τ (grandeur scalaire) est la projection du moment de la force $\vec{\tau}$ (grandeur vectorielle) en un point de l'axe , et c'est une grandeur indépendante de la position de O sur l'axe.

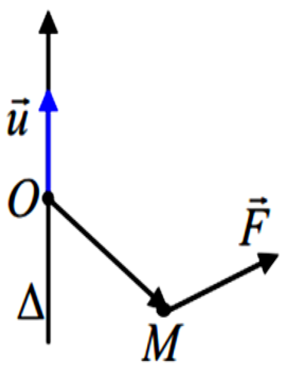


Fig.III-10: Moment d'une force

$\vec{\tau}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

III.9. Expression du moment de la force par rapport à l'axe Δ

La figure (III-11) représente une porte soumise à une force quelconque $\vec{F}$ et assujettie à tourner autour de l'axe $\Delta = OZ$. Pour faire notre étude, nous optons pour les coordonnées cylindriques (r, θ, z) les mieux adaptées à ce cas, et ayant comme origine O et Oz comme axe vertical Nous décomposons la force $\vec{F}$ en trois composantes :

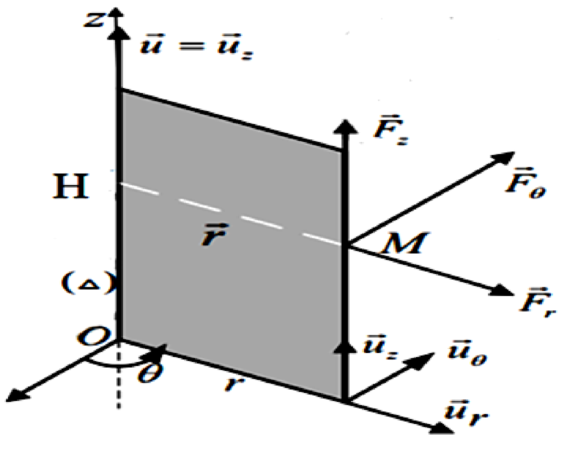


Fig.III-11: Moment de la force par rapport à l'axe

$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta + \vec{F}_z \Rightarrow \vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_z\vec{u}_z$

Oz étant l'axe, donc $\vec{u} = \vec{u}_r$ et par conséquent $\vec{\tau}_\Delta = \vec{\tau}_z = \tau_0\vec{u}_z$,

$\vec{\tau}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

$\vec{\tau}_\Delta = \vec{\tau}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F})\vec{u}_z = (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (F_r u_r + F_z\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta)\vec{u}_z$

Effectuons cette opération qui est un produit mixte de vecteurs :

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r & 0 & z \\ F_r & F_\theta & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{u}_r(0 - zF_\theta) - \vec{u}_\theta(rF_z - zF_r) + \vec{u}_z(rF_\theta - 0)$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = -zF_\theta\vec{u}_r - rF_z\vec{u}_\theta + zF_r\vec{u}_\theta + rF_\theta\vec{u}_z$$

$$\tau_\Delta = \tau_z = r.F_\theta \qquad \text{(III-18)}$$

Nous remarquons que les composantes radiale $\vec{F}_r$ et axiale $\vec{F}_z$ ne contribuent pas dans le moment par rapport à l'axe Δ

Conclusion :

* La force radiale $\vec{F}_r$ qui rencontre l'axe Δ n'a aucun effet de rotation sur la porte (elle l'arrache).

* La force axiale $\vec{F}_z$ parallèle à l'axe Δ n'a elle aussi aucun effet de rotation sur la porte (elle la soulève).

* La force normale $\vec{F}_\theta$ perpendiculaire à l'axe Δ est la seule qui a un effet de rotation sur la porte. Plus la longueur du bras est grande, plus il est facile de faire tourner la porte.

III.10.LE MOMENT CINETIQUE

III.10.1. Le Moment cinétique d'un point matériel en un point de l'espace

Soit O un point de l'espace (il n'est pas indispensable qu'il soit au repos dans un référentiel R).

On appelle moment cinétique d'un point matériel de masse m , de quantité de mouvement $\vec{P}$ et situé au point M par rapport au point O le produit vectoriel: $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$ (III-19)

Vu la similitude entre cette expression

$\vec{\tau}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ et l'expression

du moment cinétique de la force $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

on peut qualifier le moment cinétique de moment de la quantité de mouvement.

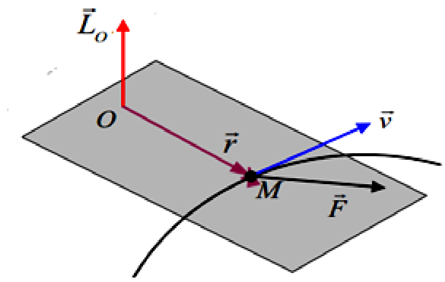


Fig.III-12: Moment cinétique

III.10.2. Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe

Par comparaison avec la définition du moment d'une force par rapport à un axe, on peut en déduire la définition du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe Δ comme suit : $L_\Delta = \vec{L}_0 \vec{u}$ Remarquons que le moment cinétique L_Δ (grandeur scalaire) est la projection du moment cinétique $\vec{L}_0$ (grandeur vectorielle) en un point de l'axe. L_Δ . est indépendant du choix de la position O sur l'axe. sans de nouveaux calculs et en se référant uniquement à la comparaison, nous arrivons à l'expression du moment cinétique d'un point matériel par rapport à l'axe Oz en fonction de la coordonnée transversale de sa quantité de mouvement

soit : $L_\Delta = L_z = r.p_\theta$ Partant des deux expressions transversales de la quantité de mouvement et de la vitesse, nous arrivons à une nouvelle expression du moment cinétique en fonction de la masse, du vecteur position et de la vitesse angulaire :

$$\left.\begin{array}{l} p_\theta = m.V_\theta \\ V_\theta = r.\dot{\theta} \\ L_\Delta = L_z = r.p_\theta \end{array}\right| \Longrightarrow L_\Delta = L_z = m.r.\dot{\theta} \qquad \text{(III-20)}$$

Remarque : Cette expression peut demeurer constante si

$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow L_\Delta = mr^2\omega$, on pose $C = r^2\dot{\theta}$.

Sous l'effet d'une force centrale, le vecteur position balaie entre les instants t_1 et t_2 le triangle OP_1P_2 dont l'aire est $ds = \frac{1}{2}\, r^2 d\theta$ (voir figure III-13) .

Divisons les deux membres par dt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\, C = C^{te}$$

la vitesse aréolaire $\frac{ds}{dt}$ est la surface balayée par le vecteur position par unité de temps

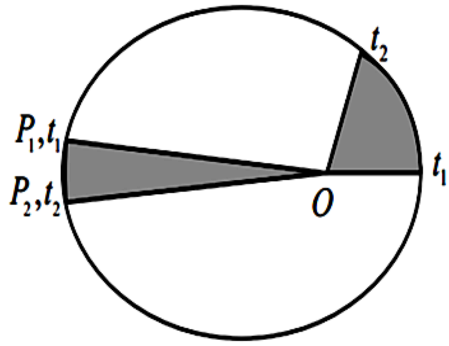


Fig.III-13: schématisation de la loi de s'aires les surfaces colorées sont égales

III.10.3. Le théorème du moment cinétique

Enoncé : En un point fixe O d'un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel est égal au moment de la force qui lui est appliquée en ce point. $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0$ (III-21)

Le moment cinétique joue pour la rotation . $(\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0)$ un rôle similaire à celui que joue la force pour la translation $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$.

11. Applications

Exercice 01

Soit le pendule simple de la figure 01. La masse « m » est assimilée à un point matériel.

1. Déterminer l'équation du mouvement de ce pendule pour les faibles oscillations. On travaillera pour la détermination de l'équation du mouvement dans une base polaire liée à la masse *m* et on utilisera le P. F. D.
2. Déterminer la même équation du mouvement, toujours pour les faibles oscillations, en utilisant cette fois le théorème du Moment Cinétique.

Exercice 02

Un traîneau de masse m=200 Kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celle-ci (Fig. 02).
1. La tension du câble vaut T=1000 N. Le mouvement étant uniforme de vitesse v=10 km/h

déterminer la réaction *R* somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau.
AN: α =20°, β=30°, g =10 m^{s-2}.
2. On augmente la tension et le mouvement du traîneau devient uniformément accéléré.
a. Le coefficient de frottement traîneau-sol restant identique, la réaction *R* est-elle modifiée?
b. La vitesse du traîneau passe de 10 Km H-1 à 20 Km H^{-1} sur une distance de 10 m.

Calculer la puissance exercée par la tension T du câble lorsque la vitesse vaut 15 Km H^{-1}.

Chapitre IV: Travail, Puissance et Energie

IV.1. Travail d'une force

IV.1.1. Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit une force constante agissant sur un point matériel M.(Figure. IV-1) Sous l'effet de $\vec{F}$, M se déplace entre les points A et B Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :

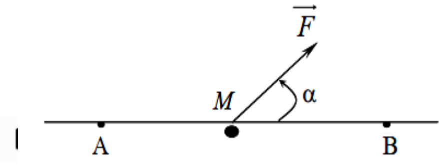


Fig.IV-1: Force constante sur un déplacement rectiligne

$$W_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB\ \cos\alpha \qquad \text{(IV-1)}$$

α est l'angle que fait $\vec{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$

Remarque

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force par rapport au déplacement (Figure. IV-2) .

* L'unité de travail, dans le système MKSA, est le **Joule**.

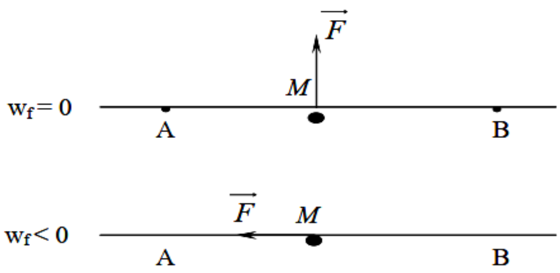


Fig.IV-2. Le travail selon la direction de la force par rapport à un déplacement

IV.2. Travail élémentaire

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours de déplacement qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente. On décompose le trajet $\overrightarrow{AB}$ en une succession de déplacements élémentaires $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petits et donc rectilignes, (Figure. IV-3).

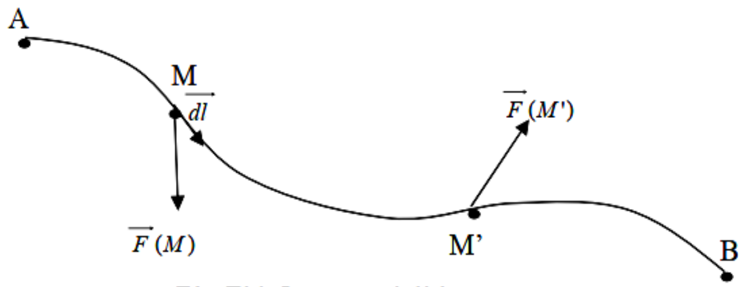


Fig.IV-3. Travail élémentaire

Sur $\overrightarrow{MM'}$, la force $\vec{F}$ peut être considéré comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par : $W_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{dl}$ (IV-2)

IV.3. Force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total sur le déplacement total , il suffit d'additionner les travaux élémentaires: $W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}\,\vec{dl}$ (IV-3)

IV.4. Travail de la force de pesanteur

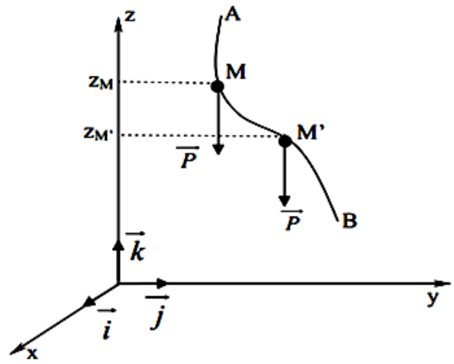


Fig.IV-4. Travail de la force de pesanteur

soit la figure(IV-4) ,avec

$h = Z_M - Z_{M'}$

$$w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}.\vec{dl}$$

et $\vec{P} = -P\vec{K}$, $dl = dx\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{P}.\vec{dl} = -PdZ$

$$\text{donc}\quad w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}.\vec{dl} = \int_M^{M'} -P.dZ = -P(Z_{M'} - Z_M)$$

$$\Rightarrow w_{\vec{P}} = P(Z_{M'} - Z_M) = Ph = mgh \qquad \text{(IV-4)}$$

IV. 5. Travail d'une force élastique

$\vec{F} = -K\,\Delta l\,\vec{i} = -K(l - l_0)\vec{i} = -kx\,\vec{i}$

$$w_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{dl} = -Kx\vec{i}dx\vec{i} = Kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$$

Lorsque $\overrightarrow{F}$ passe d'une position x_1 à x_2 , on a :

$$w_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} F.\overrightarrow{dl} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}k({x_2}^2 - {x_1}^2) \quad \text{(IV-5)}$$

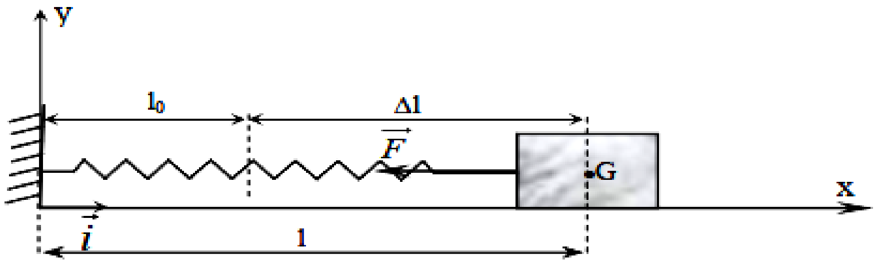


Fig.IV-5. Travail d'une force élastique

IV. 6. La puissance :

IV.6.1.Définition : Soit M un point matériel de vitesse v par rapport au référentiel R . La puissance de la force $\vec{F}$ à laquelle est soumise M est définie à chaque instant par la relation

$$\left.\begin{array}{l} P \longrightarrow \text{Watt (W)} \\ F \longrightarrow N \\ V \longrightarrow m.s^{-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow P = \vec{F}.\vec{V} \quad \text{(IV-7)}$$

Puissance moyenne : $P_{moy} = \frac{\Delta W_{\vec{F}}}{\Delta t}$ (IV-8)

Puissance instantanée : $(Pt) = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt}$ (IV-9)

IV. 7. Energie

IV.7 .1. Energie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel M, de masse m et animé avec une vitesse $\vec{v}$, par la grandeur E_C, telle que,

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 \quad \text{(IV-10)}$$

Soit un point matériel M, de masse m, en déplacement entre les points A et B sous l'action d'une force extérieure $\vec{\mathrm{F}}$,(Figure.VI-6). Selon le principe fondamental de la dynamique, on 'a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

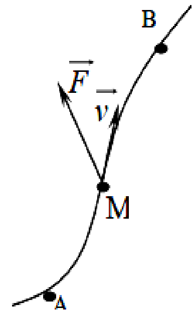


Fig.IV-6. Energie cinétique

Le travail élémentaire de $\vec{\mathrm{F}}$ est donné par :

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{dl} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{V}\,dt$$

car $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow d\vec{l} = \vec{V}(t).dt$

il vient $dW_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{dl} = d(\frac{1}{2}mV^2)$

Le travail effectué entre les points A et B sera :

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = \int_A^B dE_C = E_C(B) - E_C(A) \qquad \text{(IV-11)}$$

IV.7.2. Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une autre position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A-B}\vec{F}_{ext} \qquad \text{(IV-12)}$$

IV.7. 3. Forces conservatrices et non conservatrices

Les forces sont dites conservatrices lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

Exemples

- force de pesanteur , force du poids , force de rappel des ressorts.

Les forces sont dites non conservatrices ou forces vives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

Exemple *:* Force de frottement.

IV.7. 4. Energie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatrices ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle E_p .

$$E_P(B) - E_P(A) = -W_{A-B}\vec{F}_C \qquad \text{(IV-13)}$$

avec $\vec{F}_C$: force conservatrice

$\Delta E_P = -W_{AB}\vec{F}_C$, Lorsque la variation est très faible, $\Delta E_P \rightarrow dE_P$

En utilisant la notion du travail élémentaire, on 'a : $dE_P = -\vec{F}_C\,\vec{dl}$

D'autre part, soit le gradient ($\overrightarrow{grad}$) d'une fonction f défini par :

$$\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

La différentielle totale de f est donnée par: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}$

On définit un point M, repéré dans le référentiel Oxyz par son vecteur $\overrightarrow{OM}$,

tel que, $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\overrightarrow{\text{grad}f}.\,d\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}$$

Il vient: $\overrightarrow{\text{grad}f}.\,d\overrightarrow{OM} = df$ (*)

A partir de l'équation (*), on peut facilement remarquer que puisque $dE_P = -\vec{F}_C\,\overrightarrow{dl}$ avec $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

alors, $\vec{F}_C = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_P$ (IV-14)

IV.7. 5. Exemples de forces conservatrices

IV.7. 5.1. Force gravitationnelle

soit la figure Fig. IV-7, avec $\vec{F}_g$: est une force conservatrice.

$$\vec{F}_g(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

avec $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\Rightarrow \vec{F}_g == -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

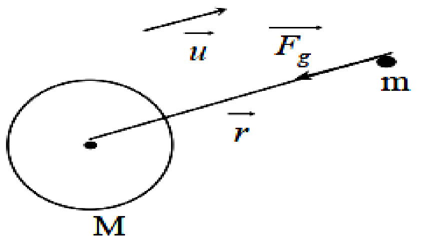


Fig.IV-7. Force gravitationnelle

$$\vec{F}_g == -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_P(r) = \frac{dE_P}{dr}\vec{u}$$

$$\frac{dE_P}{dr} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$E_P(r) = \int G\frac{Mm}{r} + cste$, $E_P(r) = G\frac{Mm}{r^2}$ (IV-15)

IV.7.5.2.Force élastique

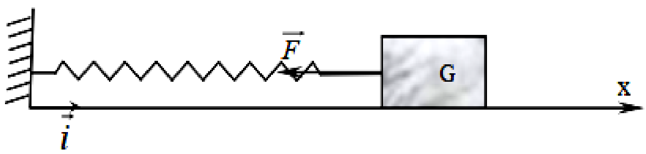


Fig.IV-8. Force élastique

$\vec{F} = -K\,x\,\vec{i}$

$\vec{F} = \overrightarrow{grad}E_P = -\dfrac{dE_P}{dx}\,\vec{i}$

$\Rightarrow \frac{dE_P}{dx} = Kx \;\Rightarrow E_P = \int Kxdx = \frac{1}{2}Kx^2 + cste$ (IV-16)

IV.7. 5.3.Force électrique

$\vec{F} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2} = K\dfrac{Qq}{r^2}$

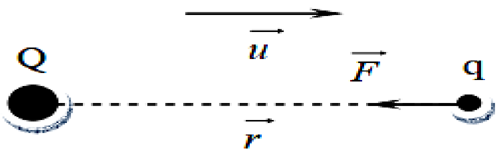


Fig.IV-9. Force électrique

En suivant le même raisonnement que précédemment,

on aura : $E_P = -K\frac{Qq}{r} + cste$ (IV-17)

IV.8. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatrices et non conservatrices. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on 'a : $E_C(B) - E_C(A) = W_{A-B}\vec{F}_C + W_{A-B}\vec{F}_{NC}$.

$\vec{F}_C$: Force conservatrice ; $\vec{F}_{NC}$: Force non conservatrice.

Alors: $E_C(B) - E_C(A) = \big(E_P(B) - E_P(A)\big) + W_{A-B}\vec{F}_{NC}$

puisque: $W_{A-B}\vec{F}_C = \big(E_P(B) - E_P(A)\big)$.

il vient : $(E_C(B) + E_P(B)) - (E_C(A) + E_P(A)) = W_{A-B}\vec{F}_{NC}$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler <u>Energie Total</u> du système Symbolisée par (E), telle que,

$E = E_C + E_P$ = Energie Cinétique + Energie Potentielle (IV-18)

Alors, entre les deux points A et B: $E(B) - E(A) = W_{A-B}\vec{F}_{NC}$ (IV-19)

IV.8.1. Théorème de l'énergie mécanique totale

La variation de l'énergie mécanique totale d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatrices appliquées à ce système,

$$E(B) - E(A) = W_{A-B}\vec{F}_{NC}$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservatrice) l'énergie totale se conserve.

IV.9.Oscillateur harmonique simple

IV.9.1.Définition : L'oscillateur harmonique simple est tout système qui effectue un mouvement périodique autour d'une position d'équilibre stable et n'étant soumis à aucun amortissement (comme par exemple les frottements) ni aucune excitation. Le mouvement est régi par l'équation différentielle linéaire:

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \qquad \text{(IV-20)}$$

Nous connaissons la solution générale d'une telle équation qui est de la forme : $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ (IV-21)

IV.9.2.Energie de l'oscillateur

La figure .(VI-10.(a)) représente un pendule simple (le fil est inextensible de longueur l et de masse m négligeable). La masse est soumise aux deux forces, son poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ du fil .

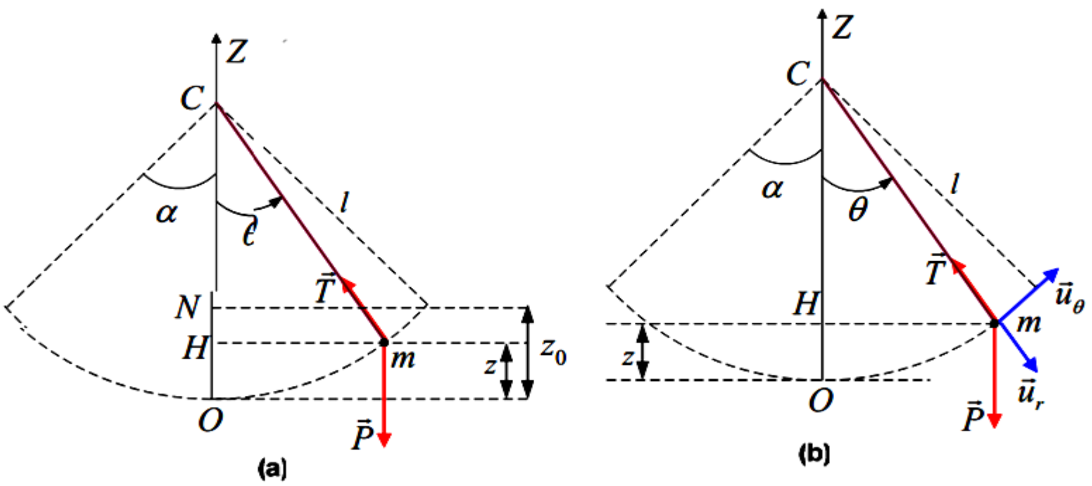


Fig.IV-10. Energie d'un oscillateur

Le poids dérive d'un potentiel, et le travail de la tension $\vec{T}$ est nul puisque sa direction est perpendiculaire à la trajectoire à tout instant. On prend comme origine pour l'énergie potentielle le plan horizontal contenant le point O . D'après la (figure VI-10. (b)), pour une position correspondant à l'angle θ on 'a :

$$E_P = mgz = mg\,(OH) = mg\,(\,CO - CH) = mgl\,(1 - \cos\theta) \qquad \text{(IV-22)}$$

L'expression de la vitesse circulaire tangente à la trajectoire est : $\vec{V} = l\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ On peut calculer maintenant l'énergie mécanique du pendule (appelée aussi la première intégration de l'énergie) :

$$E_M = E_P + E_C = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = cste \qquad \text{(IV-23)}$$

Divisons cet équation par ml^2 et posant ${\omega_0}^2 = \frac{g}{l}$, l'expression de l'énergie mécanique s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{\theta}^2 + 2{\omega_0}^2(1 - \cos\theta) = K \qquad \text{(IV-24)}$$

Où $K = \frac{2C^{te}}{ml^2}$ est une constante déterminée par les conditions initiales.

Si on prend par exemple $\dot{\theta}_0 = 0$ pour $\dot{\theta}_0 = \alpha$, dans ce cas et d'après la figure .(VI-10.(a)), on' a :

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow -\Delta E_P = \Delta E_C \Rightarrow -mg(z - z_0) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \qquad \text{(IV-25)}$$

or $$-mgl(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Pour de pareilles conditions l'équation $\dot{\theta}^2 + 2{\omega_0}^2(1 - \cos\theta) = K$ devient :

$$\dot{\theta}^2 + 2{\omega_0}^2(\cos\alpha - \cos\theta) = 0 \qquad \text{(IV-26)}$$

IV.9.3.Equation du mouvement

L'équation du mouvement est une équation différentielle de deuxième ordre. On l'obtient en dérivant, par rapport au temps, l'équation

$$\dot{\theta}^2 + 2{\omega_0}^2(\cos\alpha - \cos\theta) = 0 \qquad \text{(IV-27)}$$

on obtient $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin\theta = 0$ (IV-28)

* pour des oscillations de faible amplitude $(\sin\theta \sim \theta_{rad} \Leftarrow 10^0 \geq \theta)$ l'équation s'écrit : $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$ (IV-29)

La solution générale de cette équation est :

$$\theta = \alpha \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(IV-30)}$$

Cela nous indique que le mouvement est un mouvement de rotation sinusoïdal de pulsation ω_0 , et de période : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ (IV-31)

* On peut arriver à l'équation $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin\theta = 0$ en partant de la loi de mouvement $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$, et en projetant cette dernière expression sur la direction radiale :

$$-mg \sin\theta = ml\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin\theta = 0 \qquad \text{(IV-32)}$$

IV.10.Collision de particules

IV.10.1.Conservation de la quantité de mouvement

Nous dirons qu'un système a subit un choc si les vitesses de ses éléments ont eu des variations considérables entre deux instants, avant et après le choc, de telle façon qu'il ait un échange de quantité de mouvement et d'énergie entre les différents éléments.

Soient $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$ les quantités de mouvement de deux corps avant la collision, et $\vec{P'}_1$ et $\vec{P'}_2$ les quantités de mouvement après le choc. Le système est supposé isolé.

Les effets mutuels échangés entre les deux particules de masses $m_1$et m_2 se produisent dans une région très limitée de l'espace et très petite, C'est pour cela que nous disons qu'il s'agit d'un choc ponctuel.

Puisque le système est isolé, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées. Donc, on peut écrire :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1^{\,'} + \vec{P}_2^{\,'} = \text{cste} \Rightarrow \Delta\vec{P} = \vec{0} \qquad \text{(IV-33)}$$

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1^{\,'} + m_2\vec{V}_2^{\,'} \qquad \text{(IV-34)}$$

Notez bien le caractère vectoriel des deux équations.

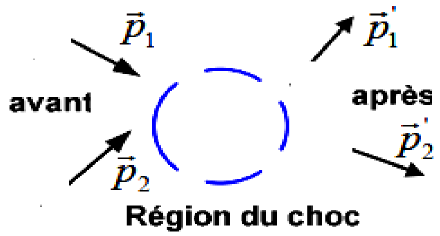


Fig.IV-11. Collision de particules

IV.10.2.Le choc élastique :

Le choc entre deux particules est élastique si l'énergie cinétique totale $\mathrm{E_C}$ du système est conservée au cours du choc. Les particules ne s'unissent pas après le choc.

Si on note l'énergie cinétique avant le choc par $\mathrm{E_C}$ et par $\mathrm{E'_C}$ après le choc , et en se rappelant de l'expression $\mathrm{E_C} = \frac{\mathrm{P}^2}{2\mathrm{m}}$, on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{E_C} = \mathrm{E'_C} \Rightarrow \Delta E_C = 0 \\ \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2} = \dfrac{m_1V_1'^2}{2} + \dfrac{mV_2'^2}{2} \\ \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2} = \dfrac{m_1V_1'^2}{2} + \dfrac{mV_2'^2}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad \text{(IV-35)}$$

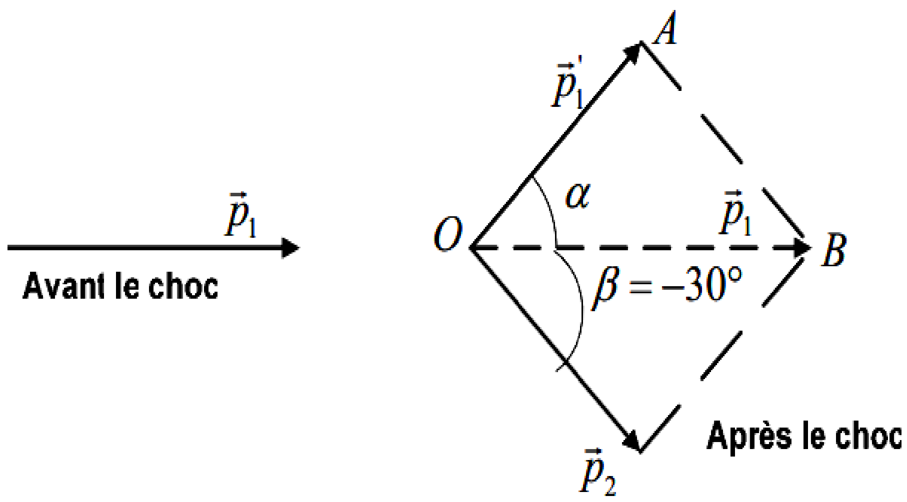
Exemple1

Un projectile de masse $800g$ se déplace sur une droite horizontal à la vitesse de $1m.s^{-1}$ pour atteindre une cible au repos de masse$800g$. La cible touchée se met en mouvement suivant une direction faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

a/ Déterminer la direction et le module de la vitesse du projectile après le choc.

b/ Déterminer l'intensité de la vitesse de la cible après le choc.

Réponse : a/ Détermination de la direction du projectile et calcul de son module : Voir figure



$$\left.\begin{array}{l}\frac{P^2{}_1}{2m_1} = \frac{P'^2{}_1}{2m_1} + \frac{P^2}{2m_2} \\ m_1 = m_1 = m\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad P_1{}^2 = +P_2{}'^2 + P^2$$

Le triangle OAB est rectangle, ce qui implique que le quadrilatère est un rectangle, donc : $\alpha + \beta = 90^0 \Rightarrow \alpha = 60^0$

$$\cos\alpha = \frac{P'_1}{P_1} = \frac{V'_1}{V_1} \Rightarrow V'_1 = 0.5\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

b/ Calcul du module de la vitesse:

$$\cos(-30) = \frac{mV}{mV_1} = \frac{V}{V_1} \Rightarrow V = 0.87\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

IV.10.3.Le choc mou

Le choc entre deux particules séparées et dit mou , si elles s'unissent après le choc pour former un seul corps. Les deux particules auront la même vitesse après le choc.

Dans ce cas : Si $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont les quantités de mouvement des deux particules séparées avant le choc, et $\vec{p}\,'$ la quantité de mouvement des deux particules unies après le choc, nous pouvons écrire alors :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}_1+\vec{P}_2=\overrightarrow{p\,'}=\text{Cte}\Rightarrow\Delta\vec{P}=\vec{0}\\[2ex]\dfrac{P^2{}_1}{2m}+\dfrac{{P_2}^2}{2m}=\dfrac{P'^2}{2(m_1+m_2)}\\[2ex]\frac{1}{2}m_1{V_1}^2+\frac{1}{2}m_2{V_2}^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V'^2\end{array}\right\}\Longrightarrow \qquad \text{(IV-36)}$$

Exemple 2

Une particule de masse 5*kg* se déplaçant à la vitesse de 20*m.s*$^{-1}$entre en collision perpendiculairement avec une autre particule de masse 6*kg* qui se déplaçait à la vitesse de 15*m.s*$^{-1}$. En considérant le choc mou:

a/ Quelle est la quantité de mouvement du système ?

b/ Calculer la vitesse des particules après le choc.

Réponse :

a/ $134.5\ \text{kg m.s}^{-1}$

b/ $12.23\ \ \text{m.s}^{-1}$

* Bibliographie

1- Alain Gibaud, Michel Henry ,Cours de physique Mécanique du point, $2^{ème}$ édition ´ , Dunod, 2007. *https://livre.fnac.com/a1982495/Alain-Gibaud-Mecanique-du-point-2eme-edition*

2- Alain Thionnet, Physique-LMD - Mécanique du point - niveau L1- Editions Ellipses,*https://www.editions-ellipses.fr/product_info.php?products_id=6606*

3- Ahmed Fizazi , Mecanique du point matériel : rappel de cours et exercice corrigés , *https://www.fichier-pdf.fr/2016/11/14/cours-physique-1ere-annee/*

4- Ziani Nossair ,Boutaous Ahmed , Mécanique du point matériel, Cours et Exercices ,. *https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/cours_de_mecanique_point.pdf*

5- M. Alonso, E.J. Finn : Physique générale Tome 1-Mécanique et Thermodynamique ´ , Inter Editions, 1994. *https://www.amazon.fr/ Physique générale Tome 1- Mécanique et thermodynamique /dp/....*

6- Émile Amzallag, Josseline Ben Aïm, Norbert Piccioli, La physique en fac - Mecanique - Rappels De Cours, 1ere et 2éme annees . Ediscience. Aout 2003

https://www.librairiedialogues.fr/livre/620270-la-physique-en-fac-mecanique-rappels-de-cou--emile-amzalla

7- Dunod, Paris, 2010,ISBN 978-2-10-055558-1,PHYSIQUETOUT-EN-UN POUR LA LICENCE, Cours, applications et exercices corrigés, , *https://cours-examens.org/images/An_2017_1/Etudes_superieures/Physique/Livre/Physique.pdf*

8- Resnick / Halliday, Physique - Mécanique, tome 1 - Cours et exercices ,

https://www.amazon.fr/Physique- Mécanique, tome 1-Cours-exercices-corrigée

9- L. Valentin - L'Univers mécanique : Introduction à la physique et à ses méthodes- Hermann. *https://www.amazon.fr/Lunivers-mécanique-Introduction à la physique et à ses méthodes- Hermann.*

10-RAHMANI Ahmed, Cours Mécanique du Point Matériel, UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM EL-BOUAGHI,2018, www.univ-oeb.dz/fssa/wp.../Cours-de-Physique-I-Mécanique-du-point-Matériel.pdf.